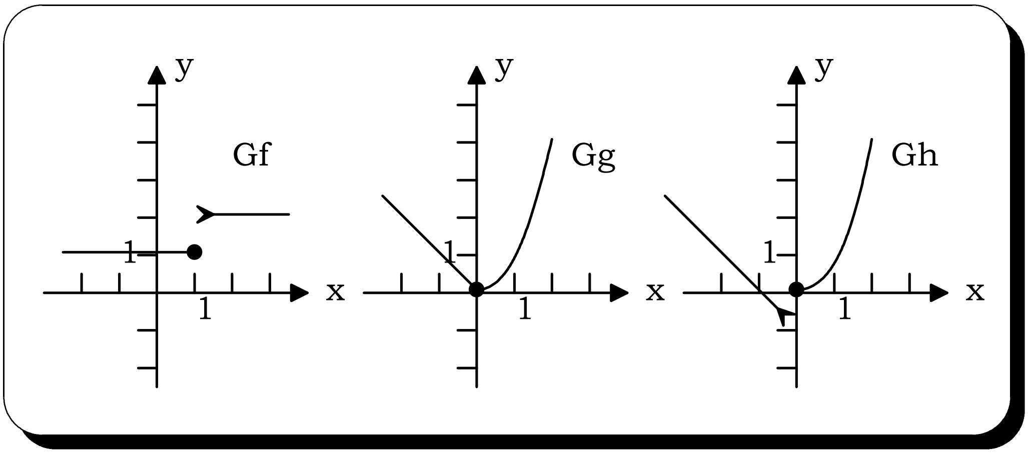
6.3 Stetigkeit und stetige Fortsetzung

Lokale und globale Stetigkeit

Beispiele:

1. $f: x \to \begin{cases} 2 & \text{für } x > 1 \\ 1 & \text{für } x \leq 1 \end{cases}$, $D_f = R$ (vergleichbar der "Portofunktion")
2. $g: x \to \begin{cases} -x & \text{für } x < 0 \\ x^2 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$, $D_g = R$
3. $g: x \to \begin{cases} -x-1 & \text{für } x < 0 \\ x^2 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$, $D_h = R$.

Graphen:



Man erkennt sofort, dass nur der Graph von g durch einen geschlossenen Kurvenzug darstellbar ist, während die Graphen von f und h zwar in ganz R definiert sind, aber an den Stellen 1 (f) bzw. 0 (h) Sprungstellen aufweisen, der Graph also nicht durchgezeichnet werden kann. Nur bei der Funktion g gilt für jedes $x \in R$, dass einer kleinen Änderung von x eine kleine Änderung des Funktionswerts entspricht.

Daraus wird folgende Definition verständlich:

Definition: Eine Funktion f: $x \to f(x)$, $x \in D_f$, heißt an der Stelle $x_0 \in D_f$ stetig, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ist.

Anmerkungen:

1. Die Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft einer Funktion.
2. Wenn nur eine z. B. linksseitige Umgebung von $x_0 \in D_f$ zu D_f gehört, sonst aber alle Voraussetzungen für Stetigkeit erfüllt sind, dann spricht man von linksseitiger Stetigkeit von f an der Stelle x_0.
3. Die Stetigkeit in einem Intervall (globale Stetigkeit) basiert auf der der Stetigkeit an einer Stelle:
   Def.: Eine Funktion f heißt im Intervall I =]a; b[$\subseteq D_f$ stetig, wenn sie an allen Stellen $x_0 \in$]a; b[stetig ist. Sie heißt in [a; b] $\subseteq D_f$ stetig, wenn sie zusätzlich an den Randstellen a und b einseitig stetig ist.

4. Eine Funktion kann an einer Stelle x_0 nur stetig sein, wenn sie in x_0 definiert ist.

Unstetigkeit und stetige Fortsetzung

Beispiele:

1. $f : x \to \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$
   f hat an der Stelle $x_0 = 0$ eine endliche Sprungstelle, eine sog. Unstetigkeitsstelle.
2. $g : x \to \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x > 0 \\ x & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$
   g hat an der Stelle $x_0 = 0$ eine unendliche Sprungstelle, eine Unstetigkeitsstelle.
3. $h : x \to \frac{1}{|x|},\ D_h = R\backslash\{0\}$
   eine Aussage über die Stetigkeit von h an der Stelle $x_0 = 0$ ist wegen $x_0 \notin D_h$ nicht möglich.

Definition: Ist eine Funktion f an einer Stelle $x_0 \in D_f$ nicht stetig, dann heißt sie an x_0 unstetig.

Anmerkung:

1. An Stellen, an denen eine Funktion nicht erklärt ist, stellt sich die Frage nach Stetigkeit bzw. Unstetigkeit nicht.
2. Def.: Sei f: $x \to f(x)$ gegeben. Dann heißt $x_0 \in D_f$ Pol von f an der Stelle x_0, wenn $\left|\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f}\right| = \infty$ ist.

Eine Funktion f, die an einer Stelle $x_0 \notin D_f$ einen (endlichen) Grenzwert hat, kann durch Einfügen eines geeigneten Funktionswertes an x_0 zu einer stetigen Funktion fortgesetzt werden.

Beispiel: $f : x \to \frac{x^2-3\cdot x+2}{x^2+x-6}$
Es lässt sich durch Primfaktorzerlegung leicht die maximale Definitionsmenge und anschließend eine algebraische Vereinfachung vornehmen:
$f : x \to \frac{x^2-3\cdot x+2}{x^2+x-6} = \frac{(x-2)\cdot(x-1)}{(x+3)\cdot(x-2)} \Rightarrow D_f = R\backslash\{-3; +2\}$
Vereinfachung: $f : x \to \frac{x-1}{x+3}$.
Es ist sofort zu erkennen, dass
$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x-1}{x+3} = \frac{1}{5}$.

Dann kann mit der neuen Funktion
$g : x \to \begin{cases} \frac{x^2-3\cdot x+2}{x^2+x-6} & \text{für } x \in D_f \\ \frac{1}{5} & \text{für } x = 2 \end{cases}$
zweierlei erreicht werden:

1. g ist fast identisch mit der Funktion f; sie ist auch an der Stelle x = 2 erklärt, d. h. $g \supset f$ (g heißt dann Fortsetzung von f).
2. g ist an der Stelle x = 2 sogar stetig.

Dann ist die folgende Definition einleuchtend:

Definition: Sei f: $x \to f(x)$ mit $x \in D_f$ eine in D_f stetige Funktion. Eine Funktion g: $x \to g(x)$ mit $x \in D_g$ heißt dann stetige Fortsetzung von f, wenn g Fortsetzung von f und in D_g stetig ist.

Anmerkungen:

1. Eine Funktion f ist an einer Stelle $x_0 \notin D_f$ stetig fortsetzbar, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert. Für $g(x_0)$ ist dann einfach $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ einzusetzen.
2. Wenn sich eine Funktion f kürzen lässt, falls $x \neq x_0$ ist, dann ist die gekürzte Funktion g mit $x_0 \in D_g$ stetige Fortsetzung von f an der Stelle x_0.
3. Eine Stelle x_0, an der die stetige Fortsetzung einer Funktion f möglich ist, heißt hebbare Definitionslücke.

Stetigkeitssätze

Ohne Beweis sei der folgende Satz angegeben:

Satz: Es seien die Funktionen f: $x \to f(x)$ und g: $x \to g(x)$ in einem gemeinsamen Intervall I stetig. Dann sind Summe, Differenz, Produkt und Quotient (falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I$) in I stetig.

Anwendung:
Die Funktion f: $x \to x$ ist sicher in R stetig. Dann sind auch z. B. die Funktionen
g: $x \to 2 \cdot x$,
h: $x \to 5 \cdot x^2$,
generell alle Polynomfunktionen in R stetig.