6.4 Untersuchung von Funktionen auf Stetigkeit

Beispiele für die Prüfung der Stetigkeit

Beispiel 1: $f: x \to \begin{cases} x+1 & \text{für } x \geq 2 \\ 1 & \text{für } x < 2 \end{cases}$

Man erkennt sofort:
f(2) = 3
$\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+0} (x+1) = 3$
$\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-0} 1 = 1$,
d. h. $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2-0} f(x)$.
Es existiert also kein Grenzwert von f für x gegen 2, die Funktion ist also an der Stelle x = 2 unstetig.

Beispiel 2: $f: x \to \begin{cases} x+1 & \text{für } x \neq 2 \\ 1 & \text{für } x = 2 \end{cases}$

Man erkennt sofort:
f(2) = 1
$\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+0} (x+1) = \lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = 3$.
Die Funktion ist also an der Stelle 2 unstetig.

Beispiel 3: $f: x \to \begin{cases} x+1 & \text{für } x \geq 2 \\ x^2-1 & \text{für } x < 2 \end{cases}$

Wieder gilt
f(2) = 3, außerdem $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+0} (x+1) = 3$
$\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-0} (x^2-1) = 3$,
also gilt
$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3 = f(2)$.
Die Funktion ist also an der Stelle x = 2 stetig.

Beispiele für stetige Fortsetzung

Beispiel 1: $f: x \to \frac{2\cdot x^2+x-3}{x^2-1} = \frac{2\cdot\left(x^2+\frac{1}{2}\cdot x-\frac{3}{2}\right)}{x^2-1} = \frac{2\cdot\left(x^2+\frac{1}{2}\cdot x-\frac{3}{2}\right)}{x^2-1} = \frac{2\cdot(x-1)\cdot\left(x+\frac{3}{2}\right)}{(x+1)\cdot(x-1)}$

Definitionsmenge: D = R\{-1; +1}
gekürzter Term: $f: x \to \frac{2\cdot(x-1)\cdot\left(x+\frac{3}{2}\right)}{(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{2\cdot\left(x+\frac{3}{2}\right)}{(x+1)}$

Man erkennt sofort, dass
$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{2\cdot\left(x+\frac{3}{2}\right)}{(x+1)} = \frac{2\cdot\left(1+\frac{3}{2}\right)}{1+1} = \frac{5}{2}$.
Für die stetige Fortsetzung g von f folgt daraus
$g: x \to \frac{2\cdot x+3}{x+1} = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in D_f \\ \frac{5}{2} & \text{für } x = 1 \end{cases}$.

Es ist leicht zu sehen, dass

$\lim\limits_{x\to -1+0} \frac{2\cdot x+3}{x+1} = +\infty$ sowie $\lim\limits_{x\to -1-0} \frac{2\cdot x+3}{x+1} = -\infty$.

Außerdem gilt
$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2\cdot x+3}{x+1} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2\cdot x+3}{x+1} = 2$.

Daraus folgt der entsprechende Graph.

Beispiel 2: Welchen Wert muss der Scharparameter a annehmen, und welchen Funktionswert müssen Sie an der Stelle $x_0 = 2$ verlangen, damit die nachfolgende Funktion
$f : x \to \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x^2-4} & \text{für } x > 2 \\ a \cdot x^2 - x & \text{für } x < 2 \end{cases}$ an der Stelle x_0 stetig fortsetzbar ist? Wie heißt dann die stetige Fortsetzung g von f?

Lösung: Der Teilterm $\frac{x^2-x-2}{x^2-4}$ lässt sich für x > 2 vereinfachen:
$\frac{x^2-x-2}{x^2-4} = \frac{(x-2)\cdot(x+1)}{(x-2)\cdot(x+2)} = \frac{(x+1)}{(x+2)}$.
Dann folgt unmittelbar
$\lim\limits_{x\to 2+0} \frac{(x+1)}{(x+2)} = \frac{3}{4}$.
Denselben Wert muss auch der linksseitige Grenzwert liefern:
$\lim\limits_{x\to 2-0} (a \cdot x^2 - x) = 4 \cdot a - 2 = \frac{3}{4}$.
Dies gelingt aber nur für
$4 \cdot a = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4} \Rightarrow a = \frac{11}{8}$.
Als Funktionswert an der Stelle $x_0 = 2$ muss $g(2) = \frac{11}{8}$ verlangt werden.
Die stetige Fortsetzung ist dann gegeben durch

$$g : x \to \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x^2-4} & \text{für } x > 2 \\ \frac{11}{8} & \text{für } x = 2 \\ \frac{11}{8} \cdot x^2 - x & \text{für } x < 2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x+1}{x+2} & \text{für } x \geq 2 \\ \frac{11}{8} \cdot x^2 - x & \text{für } x < 2 \end{cases}$$