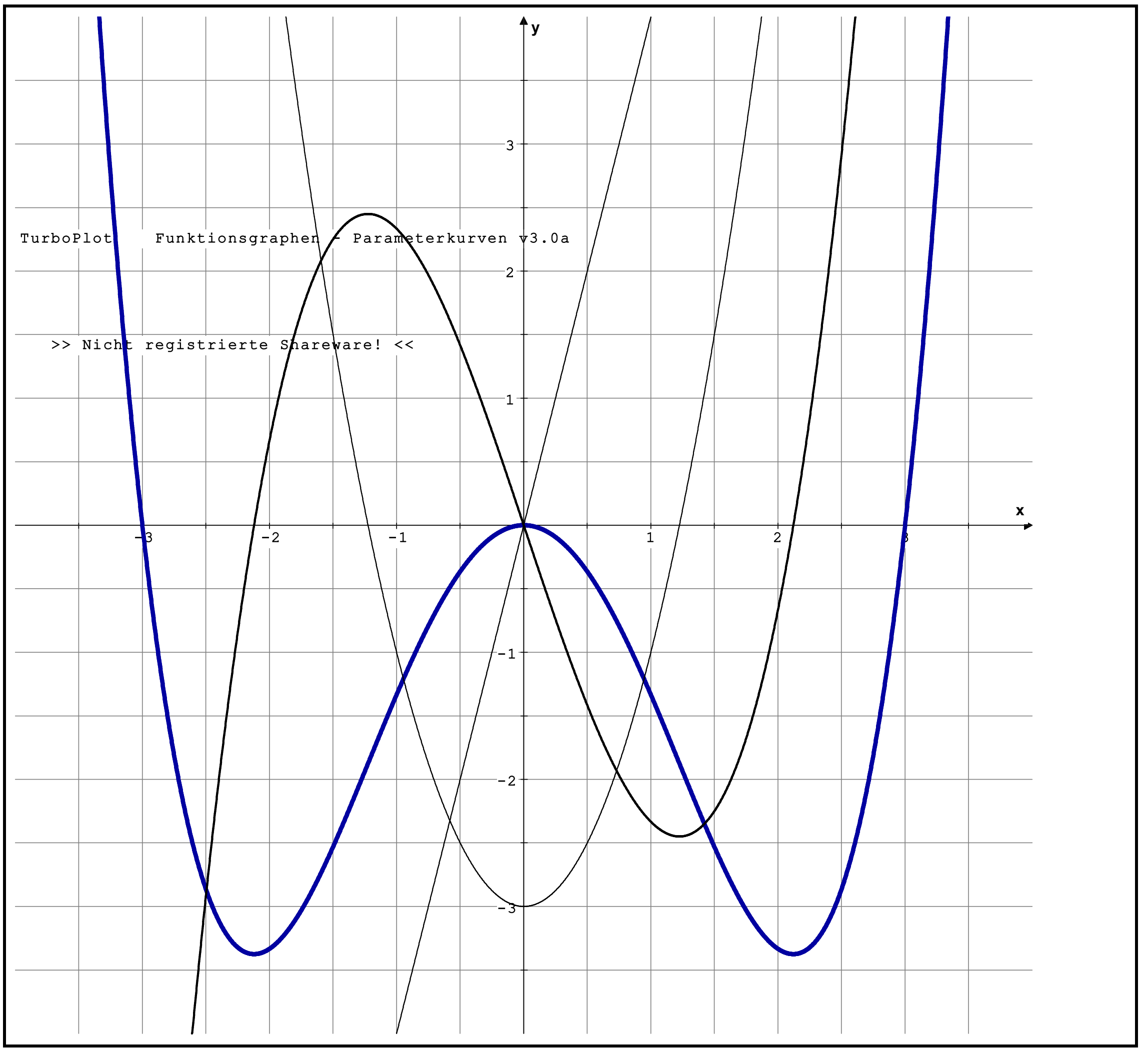
# A7.2 Kenntnis der Bedeutung der 1. und 2. Ableitung für den Graphen einer Funktion; Untersuchung ganzrationaler Funktionen

Die folgenden grundsätzlichen Überlegungen sollen am Beispiel der Funktion $f(x) = \frac{1}{6} \cdot (x^4 - 9 \cdot x^2) = \frac{1}{6} \cdot x^4 - \frac{3}{2} \cdot x^2$ diskutiert und erläutert werden.

Diese Funktion hat die Ableitungsfunktionen

$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^3 - 3 \cdot x$,
$f''(x) = 2 \cdot x^2 - 3$,
$f'''(x) = 4 \cdot x$.

Die von einem Computerprogramm gezeichneten Graphen von f und ihren Ableitungen zeigen bereits erste Zusammenhänge:



## Definitionsmenge

Die maximale Definitionsmenge ist $D_f$ = R. Über die Wertemenge kann in diesem Stadium der Diskussion noch nichts ausgesagt werden.

## Nullstellen

Nullstellen sind diejenigen Stellen der Definitionsmenge, für die f(x) = 0 gilt. Für unser Beispiel gilt

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{6} \cdot x^2 \cdot (x^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{6} \cdot x^2 \cdot (x-3) \cdot (x+3) = 0$
$x = 0 \vee x = 3 \vee x = -3$

## Symmetrie

Eine Funktion weist eine einfache Symmetrie auf, wenn gilt:
f(-x) = f(x) für alle $x \in D_f \Rightarrow G_f$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse
f(-x) = -f(x) für alle $x \in D_f \Rightarrow G_f$ ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung

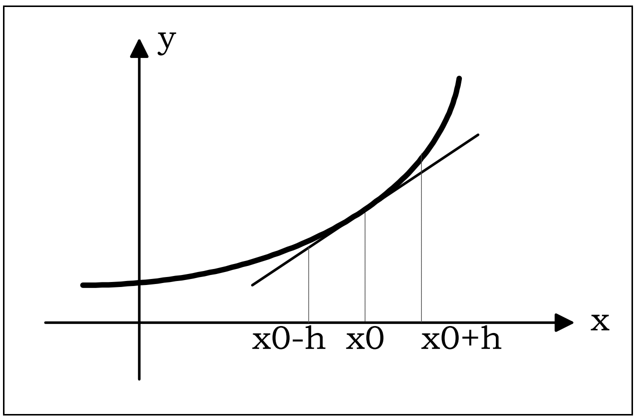
Die vorliegende Funktion ist eine ganzrationale Funktion mit ausschließlich geraden Exponenten. Für sie gilt sicher f(-x) = f(x), ihr Graph ist daher achsensymmetrisch zur y-Achse.

## Monotonieverhalten

Zur Wiederholung soll an die Definition für die strenge Monotonie einer Funktion in einem Intervall erinnert werden:

Def.: Eine Funktion f ist in einem Intervall I = [a; b] streng monoton zunehmend, wenn $f(x_2) > f(x_1)$ gilt für alle $x_1, x_2 \in I \wedge x_2 > x_1$.

Die Monotonie ist aber eng mit der Ableitung verknüpft. Es ist unmittelbar einsichtig, dass das Steigen eines Funktionsgraphen i. a. mit einer positiven Tangentensteigung, also einem positiven Wert der 1. Ableitung einhergeht (vgl. Skizze).



Damit wird folgender Satz plausibel:

> Satz: Ist f: $y = f(x)$ mit $x \in D_f$ an einer Stelle $x \in D_f$ differenzierbar und gilt $f'(x_0) > 0$, dann nimmt f an der Stelle $x_0$ streng monoton zu.

Beweis: Für eine Hilfsvariable $h > 0$, d. h. $x = x_0 \pm h$, gilt

$$0 < f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$$

Die Existenz dieses Grenzwertes bedeutet, dass in einer gewissen Umgebung $U_{h^*}(x_0)$ mit $h < h^*$ gilt:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} > 0 \text{ und } \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h} > 0$$

bzw. wegen $h > 0$

$f(x_0 + h) - f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0 + h) > f(x_0)$ und

$f(x_0 - h) - f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0 + h) < f(x_0)$.

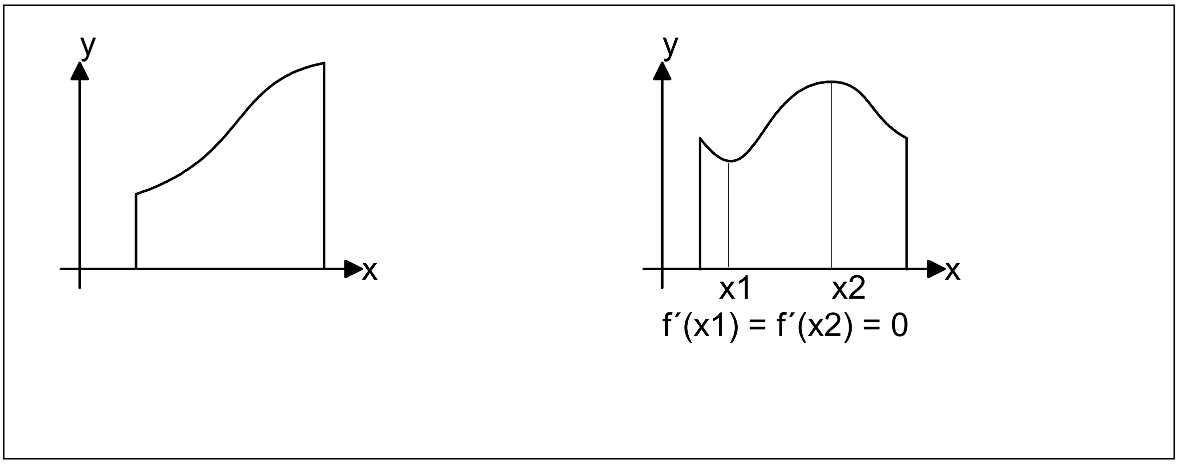
Genau dies ist aber der Fall, wenn eine Funktion an einer Stelle $x_0$ streng monoton zunehmen soll.

Anmerkungen:

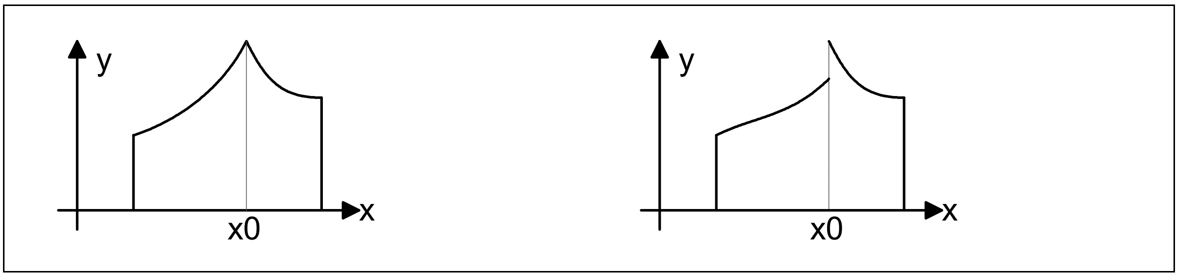
1. $f'(x_0) > 0$ ist eine hinreichende Bedingung für streng monotones Zunehmen einer Funktion an der Stelle $x_0$.
2. $f'(x_0) > 0$ ist keine notwendige Bedingung für streng monotones Zunehmen einer Funktion f an der Stelle $x_0$. Beispiel: f: $x \to x^3$, $x_0 = 0$.
3. Die Bedingung kann auf ein Intervall erweitert werden.

**Extrema**

Mögliche Lage von Extrema:




Extrema an den Rändern relative Extrema)




Extremum am Knick

Extremum an einer Sprungstelle

Definition: Der Graph einer Funktion f: $y = f(x)$ hat an der Stelle $x_0 \in D_f$ ein lokales Maximum (Minimum), wenn für eine gewisse Umgebung $U_\delta(x_0)$ gilt:
$f(x_0) > f(x)$ für alle $x \in U_\delta(x_0)$ (lokales Maximum) bzw.
$f(x_0) < f(x)$ für alle $x \in U_\delta(x_0)$ (lokales Minimum).
Maxima und Minima heißen auch Extrema.

Dann gelten folgende Sätze:

Satz: Es sei f: $y = f(x)$ in $I \subseteq D_f$ differenzierbar. Dann gilt:
f hat in $x_0$ ein Extremum $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.

Beweis (e contrario):
Annahme: Es gelte $f'(x_0) \neq 0$. Dann müssten in einer geeigneten Umgebung von $x_0$ die Funktionswerte f(x) auf einer Seite von $x_0$ größer, auf der anderen Seite kleiner als in $x_0$ sein (Monotoniesatz!). Dies ist aber ein Widerspruch zur geforderten Eigenschaft der Extremität!

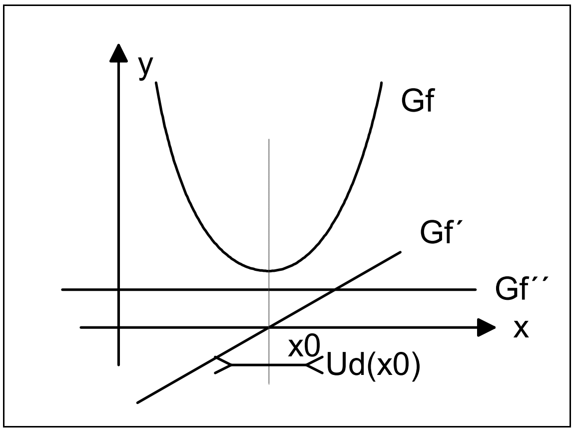
Anmerkung:
Die umgekehrte Pfeilrichtung ist falsch, wie das Beispiel $f: y = x^3$ an der Stelle $x_0 = 0$ zeigt!

$f'(x_0) = 0$ ist ein notwendiges, aber nicht hinreichendes Kriterium für das Vorliegen eines relativen Extremums. Eine hinreichende Bedingung liefert der folgende Satz:

Satz: Es sei f: $y = f(x)$ in $I \subseteq D_f$ mit $x_0 \in I$ differenzierbar. Dann gilt:
$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ f hat an der Stelle $x_0$ ein relatives Minimum.
Analoges gilt für ein relatives Maximum.

Beweis:
Erinnerung: $f''(x_0) = (f'(x_0))'$.
$f''(x_0) > 0 \wedge f'(x_0) = 0 \Rightarrow$ in einer gewissen Umgebung $U_\delta(x_0)$ gilt: $f'(x) < 0$ für $x < x_0$ und $f'(x) > 0$ für $x > x_0$. Aus $f'(x) < 0$ für $x < x_0 \Rightarrow$ f ist in $U_\delta(x\ 0)$ streng monoton abnehmend für $x < x_0$ und aus $f'(x) > 0$ für $x > x_0 \Rightarrow$ f ist in $U_\delta(x_0)$ streng monoton zunehmend für $x > x_0$. $f(x_0)$ ist also tiefster Funktionswert in $U_\delta(x_0)$.
Dies war zu zeigen.

Veranschaulichung:




Anmerkung:
Die umgekehrte Pfeilrichtung ist falsch, wie das Beispiel $f: y = x^4$ an der Stelle $x_0 = 0$ zeigt!

**Krümmung, Wendepunkte**

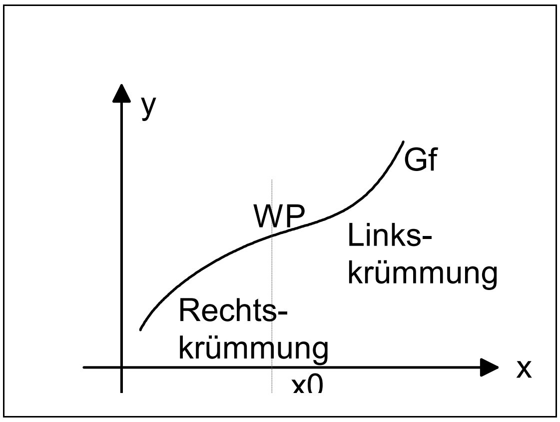
Definition: Eine Kurve heißt in $I \in D_f$ rechtsgekrümmt, wenn die Steigung der Tangente in I streng monoton abnimmt. Für Linkskrümmung gilt Entsprechendes.

Mit diesen Definitionen gilt folgender Satz:

Satz: Es sei f: y = f(x) in $I \in D_f$ differenzierbar. Dann gilt:
$f''(x) < 0$ für alle $x \in I \Rightarrow G_f$ ist in I rechtsgekrümmt;
$f''(x) > 0$ für alle $x \in I \Rightarrow G_f$ ist in I linksgekrümmt.

Beweis:
$f''(x) < 0$ in $I \Rightarrow f'$ nimmt in I streng monoton ab, d. h. die Neigung der Tangente nimmt in I ebenfalls streng monoton ab. Dies war zu zeigen!

Veranschaulichung:




Anmerkung:

Die umgekehrte Pfeilrichtung ist falsch, wie das Beispiel $f: y = x^5$ an der Stelle $x_0 = 0$ zeigt!

> Definition: Der Graph einer Funktion hat in $x_0 \in D_f$ einen Wendepunkt, wenn auf beiden Seiten von $x_0$ verschiedenes Krümmungsverhalten herrscht.

Mit dieser Definition gilt folgender Satz:

> Satz: Es sei f: $y = f(x)$ in $I \subseteq D_f$ differenzierbar. Dann gilt:
> $f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ in $x_0$ ist eine Wendestelle.

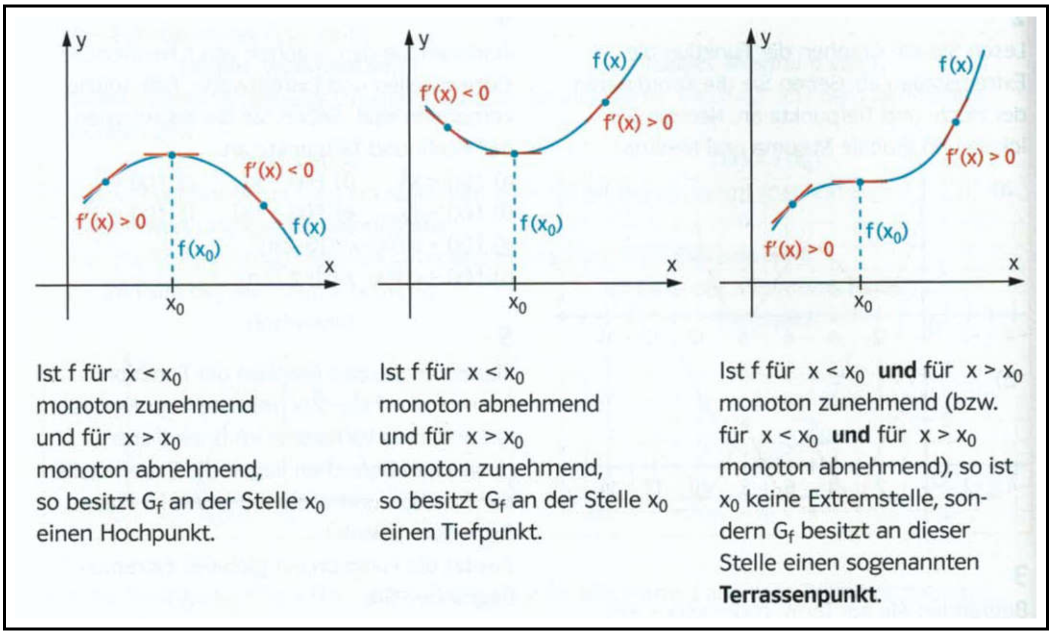
Beweis: Der Beweis folgt unmittelbar aus der Definition des Wendepunktes und dem Satz über die Krümmung eines Graphen!

Anmerkungen:
1. Die umgekehrte Pfeilrichtung ist falsch, wie das Beispiel $f: y = x^5$ an der Stelle $x_0 = 0$ zeigt!
2. Ein Wendepunkt mit horizontaler Tangente heißt Terrassenpunkt.

**Alternative: Extrema und Wendepunkte ohne jeweils höhere Ableitungen**

Wiederholung: Wenn eine Funktion f an einer inneren Stelle $x_0$ der Definitionsmenge differenzierbar ist und dort ein Extremum hat, dann gilt $f'(x_0) = 0$. Der Funktionsgraph hat dann an dieser Stelle eine waagrechte Tangente.

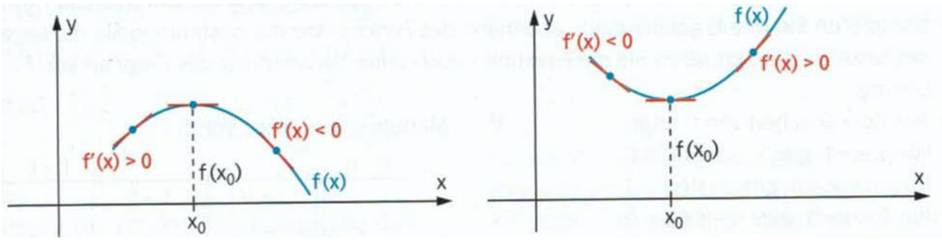
Allerdings reicht diese Bedingung nicht dafür aus, um daraus die Existenz eines Extremums an der Stelle $x_0$ abzuleiten. Es können folgende Situationen vorliegen:



Ein lokales Maximum liegt also vor, wenn zusätzlich zur Bedingung $f'(x_0) = 0$ das Monotonieverhalten von f an der Stelle $x_0$ von steigen zu fallen wechselt. Dies ist sicher der Fall, wenn in einer gewissen Umgebung von $x_0$ für $x < x_0$ gilt: $f'(x) > 0$ und für $x > x_0$ gilt: $f'(x) < 0$, wenn also $f'(x)$ an der Stelle $x_0$ einen Vorzeichenwechsel von + nach - hat. Für lokale Minima gilt entsprechendes.

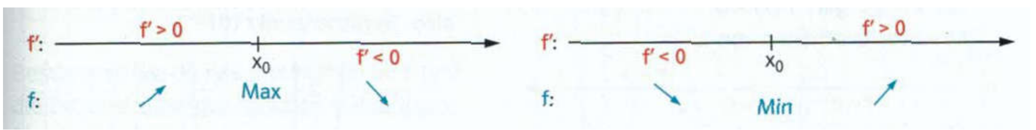
Daraus folgt folgender

Satz: Die Funktion f sei auf einem Intervall $I = ]a;b[$ und $x_0$ eine innere Stelle von I, d. h. $x \in I$.
Wenn $f'(x_0) = 0$ ist und f’ bei $x_0$ einen Vorzeichenwechsel von + nach - hat, dann hat die Funktion f ein lokales Maximum an der Stelle $x_0$.
Bei einem Vorzeichenwechsel an der Stelle $x_0$ von - nach + liegt analog ein lokales Minimum an der Stelle $x_0$ vor.




Anmerkungen:

1. Zur Darstellung des Monotonieverhaltens bietet sich folgende Tabellendarstellung an:




2. Zwischen zwei Nullstellen von f’ haben alle $f'(x)$ dasselbe Vorzeichen. Zur Bestimmung des Monotonieverhaltens von f in diesem Intervall genügt es deshalb, das Vorzeichen von f’ für ein beliebiges (einfaches) x aus diesem Intervall zu betrachten.

3. Beispiel: Zu bestimmen sind die Monotoniebereiche und die Extremstellen der Funktion $f: y = x^4 - 2x^3 - 1$.
Lösung: $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 4x^2 \cdot (x - 1,5)$
f’ hat also eine (doppelte) Nullstelle an der Stelle $x = 0$ und eine einfache Nullstelle an der Stelle $x = 1,5$.
Es gilt z. B.
$f'(-1) = -10 < 0$
$f'(1) = -2 < 0$
$f'(2) = 8 > 0$
f ist also für alle $x < 1,5$ streng monoton fallend mit einer horizontalen Tangente an der Stelle $x_1 = 0$ (=> Terrassenpunkt). An der Stelle $x_2 = 1,5$ wechselt das Vorzeichen von f’ von - auf +; es liegt also ein Minimum an der Stelle $x_2$ vor.

Daraus folgt folgendes Vorzeichenschema für f' und Monotonieverhalten von f:

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto x^4 - 2x^3 - 1$.

a) Bestimmen Sie die Monotoniebereiche und die Extremstellen der Funktion.

b) Skizzieren Sie den Graphen von f und bestimmen Sie gegebenenfalls globale Extrema.

Lösung:

a) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 4x^2(x - 1{,}5)$

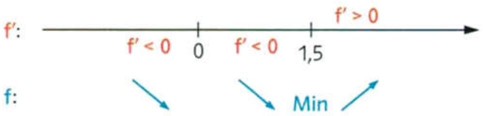
Nullstellen von f': $x_1 = 0$ und $x_2 = 1{,}5$.

Für $x < 0$ gilt: $f'(x) < 0$,

für $0 < x < 1{,}5$ gilt: $f'(x) < 0$,

für $x > 1{,}5$ gilt: $f'(x) > 0$.

Monotonieverhalten von f:




Also ist $G_f$

- streng monoton fallend für $x \in ]-\infty; 1{,}5]$
- streng monoton steigend für $x \in [1{,}5; +\infty[$

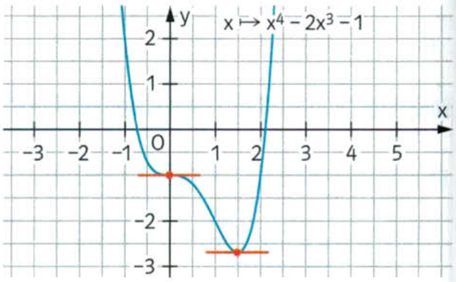
und hat ein lokales Minimum für $x_2 = 1{,}5$.

b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$

$\Rightarrow$ $y_2 = f(x_2) = f(1{,}5) = -2{,}6875$ ist ein globales Minimum. Tiefpunkt $(1{,}5 \mid \approx -2{,}7)$

$y_1 = f(x_1) = f(0) = -1$,

also Terrassenpunkt $(0 \mid -1)$




Ein Wendepunkt ist ein Punkt eines Graphen mit einer extremen Steigung (= 1. Ableitung). Alle obigen Überlegungen zu den Extrema lassen sich damit leicht auf Wendepunkte übertragen:

Gesucht ist für eine Funktion f eine Stelle mit extremer Steigung, an der also die 1. Ableitung f' ein Extremum hat. Dies ist sicher dort der Fall, wo die Ableitung der 1. Ableitung (=2. Ableitung) eine Nullstelle hat und dort das Vorzeichen wechselt.

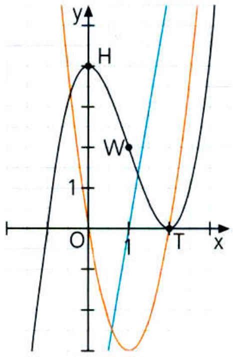
Daraus ergeben sich sofort folgende

Sätze:

Wenn $f''(x_0) = 0$ und f'' bei $x_0$ einen Vorzeichenwechsel hat, dann hat die Funktion f an der Stelle $x_0$ eine Wendestelle.

Wenn $f' = f''(x_0) = 0$ und f'' bei $x_0$ einen Vorzeichenwechsel hat, dann hat die Funktion f im Punkt $P(x_0/f(x_0))$ einen Terrassenpunkt.

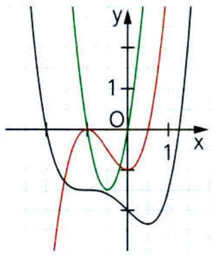
Beispiele:




- Untersuchen Sie das Monotonie- und das Krümmungsverhalten des Graphen $G_f$ der Funktion f: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$; $D_f = \mathbb{R}$, und stellen Sie Ihre Ergebnisse in einer Tabelle dar. Die Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen f, f' und f''.

Lösung:

| x | $-\infty<x<0$ | $x = 0$ | $0 < x < 1$ | $x = 1$ | $1 < x < 2$ | $x = 2$ | $2 < x < \infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | $f'(x) > 0$ | $f'(x) = 0$ | $f'(x) < 0$ | | | $f'(x) = 0$ | $f'(x) > 0$ |
| Vorzeichenwechsel von f'(x) | | von + nach – | | | | von – nach + | |
| $G_f$ | ist streng monoton steigend | hat den Hochpunkt H (0 \| 4) | ist streng monoton fallend | | | hat den Tiefpunkt T (2 \| 0) | ist streng monoton steigend |
| f''(x) | $f''(x) < 0$ | | | $f''(x) = 0$ | $f''(x) > 0$ | | |
| Vorzeichenwechsel von f''(x) | | | | von – nach + | | | |
| $G_f$ | ist rechtsgekrümmt | | | hat den Wendepunkt W (1 \| 2) | ist linksgekrümmt | | |




- Untersuchen Sie das Monotonie- und das Krümmungsverhalten des Graphen $G_f$ der Funktion f: $f(x) = 0{,}5x^4 + x^3 - x - 2$; $D_f = \mathbb{R}$, und stellen Sie Ihre Ergebnisse in einer Tabelle dar. Die Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen f, f' und f''; ordnen Sie richtig zu.

Lösung: f': $f'(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$; $D_{f'} = \mathbb{R}$ f'': $f''(x) = 6x^2 + 6x$; $D_{f''} = \mathbb{R}$

| x | $-\infty<x<-1$ | $x = -1$ | $-1 < x < 0$ | $x = 0$ | $0 < x < 0{,}5$ | $x = 0{,}5$ | $0{,}5 < x < \infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | $f'(x) < 0$ | $f'(x) = 0$ | $f'(x) < 0$ | | | $f'(x) = 0$ | $f'(x) > 0$ |
| Vorzeichenwechsel von f'(x) | | *kein* Vorzeichenwechsel von f'(x) | | | | von – nach + | |
| $G_f$ | streng monoton fallend | Terrassenpunkt (–1 \| –1,5) | streng monoton fallend | | | Tiefpunkt $(0{,}5 \mid -2\frac{11}{32})$ | streng monoton steigend |
| f''(x) | $f''(x) > 0$ | $f''(x) = 0$ | $f''(x) < 0$ | $f''(x) = 0$ | $f''(x) > 0$ | | |
| Vorzeichenwechsel von f''(x) | | von + nach – | | von – nach + | | | |
| $G_f$ | linksgekrümmt | Wendepunkt (–1 \| –1,5) | rechtsgekrümmt | Wendepunkt (0 \| –2) | linksgekrümmt | | |

Anmerkungen zu den Beispielen:
zu Beispiel 1: $f'(x) = 3 \cdot x^2 - 6 \cdot x = 3 \cdot x \cdot (x-2)$ und $f''(x) = 6 \cdot x - 6$
Daraus folgt z. B. $f'(-1) = 9$ und $f'(0{,}5) = -2{,}5$ => Vorzeichenwechsel von + nach - an der Stelle $x = -1$ => Maximum an der Stelle $x = -1$

zu Beispiel 2: $f'(x) = 2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - 1$ und $f''(x) = 6 \cdot x^2 + 6 \cdot x$
Es gilt z. B. $f'(-2) = -5$ und $f'(0) = -1$. Zudem ist $f''(-1) = 0$ mit Vorzeichenwechsel von f'' an der Stelle $x = -1$ => Wendepunkt mit horizontaler Tangente (=Terrassenpunkt) an der Stelle $x = -1$

## Kriterien bei der Kurvendiskussion

Eine Kurvendiskussion wird zweckmäßigerweise nach folgenden Gesichtspunkten vorgenommen:

1. Bestimmung von $D_{max}$
2. Untersuchung auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit
3. Symmetrie
4. Ableitungen, Nullstellen von f, f´, f´´ und f´´´
5. Steigen und Fallen, Extremwerte
6. Krümmung, Wendepunkte
7. Wertemenge, Verhalten am Rand von $D_f$, Asymptoten.

## Kurvendiskussion ganzrationaler Funktionen

Nach dem Kriterienkatalog aus dem vorangegangenen Kapitel sollen nun exemplarisch einige Funktionen untersucht werden.

### 1. Beispiel: $f : y = x^3 - 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x - 4$

Definitions- und Wertemenge: $D_{max} = R$, $W = R$

Symmetrie: Der Graph von f weist keine einfache Symmetrie auf.

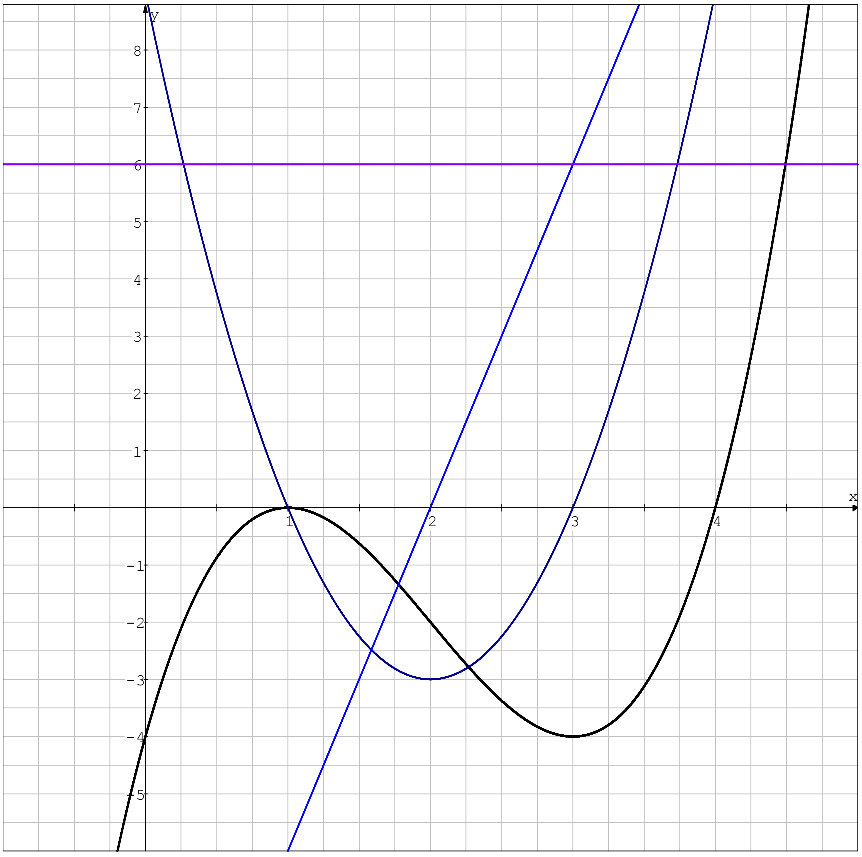
Nullstellen: Eine Nullstelle (x = 1) kann durch Erraten erhalten werden. Die weiteren Nullstellen erhält man durch Faktorzerlegung:
$(x^3 - 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x - 4) : (x - 1) = x^2 -5x +4 = (x - 1) \cdot (x - 4)$, also
$x^3 - 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x - 4 = (x - 1)^2 \cdot (x - 4)$.
Folgerung: f hat an der Stelle x = 1 eine doppelte Nullstelle ($\Rightarrow$ Berührpunkt mit der x-Achse) und an der Stelle x = 4 eine einfache Nullstelle.

Ableitungen: $f'(x) = 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 9 = 3 \cdot (x^2 - 4 \cdot x + 3) = 3 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)$
$f''(x) = 6 \cdot x - 12 = 6 \cdot (x - 2)$
$f'''(x) = 6$
Folgerungen: Die erste Ableitung hat ihre Nullstellen an den Stellen x = 1 und x = 3. Die zweite Ableitung hat eine Nullstelle an der Stelle x = 2.

Steigen und Fallen: Der Graph der ersten Ableitung ist eine nach oben offene Parabel mit den Nullstellen x = 1 und x = 3.
Folgerungen:
$f'(x) > 0$ für $x \in I_1 = R\backslash[1; 3] \Rightarrow$ f ist in $I_1$ streng monoton zunehmend.
$f'(x) < 0$ für $x \in I_2 = ]1; 3[ \Rightarrow$ f ist in $I_2$ streng monoton abnehmend.

Extrema: Die Nullstellen der ersten Ableitung liegen an den Stellen x = 1 und x = 3; an diesen Stellen gilt $f''(1) = -6 < 0$ bzw. $f''(3) = 6 > 0$ und $f(1) = 0$ bzw. $f(3) = -4$.
Folgerungen: Der Graph von f hat an der Stelle x = 1 ein relatives Maximum $P_{max}(1; 0)$ und an der Stelle x = 3 ein relatives Minimum $P_{min}(3; -4)$.

Graph:




Krümmung, Wendepunkt(e): Die zweite Ableitung hat eine Nullstelle x = 2; an dieser Stelle gilt f'''(2) = 6 $\neq$ 0 und f(2) = -2.
Folgerung: Der Graph von f hat an der Stelle x = 2 einen Wendepunkt WP(2; -2).
Für x < 2 ist der Graph nach rechts, für x > 2 nach links gekrümmt.

Verhalten am Rand von D: Der Graph von f hat keine Definitionslücken, es gilt
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

**2. Beispiel: f :** $y = \frac{5}{2} \cdot \mathbf{x}^3 - \frac{3}{8} \cdot \mathbf{x}^5$

Einige Eigenschaften:

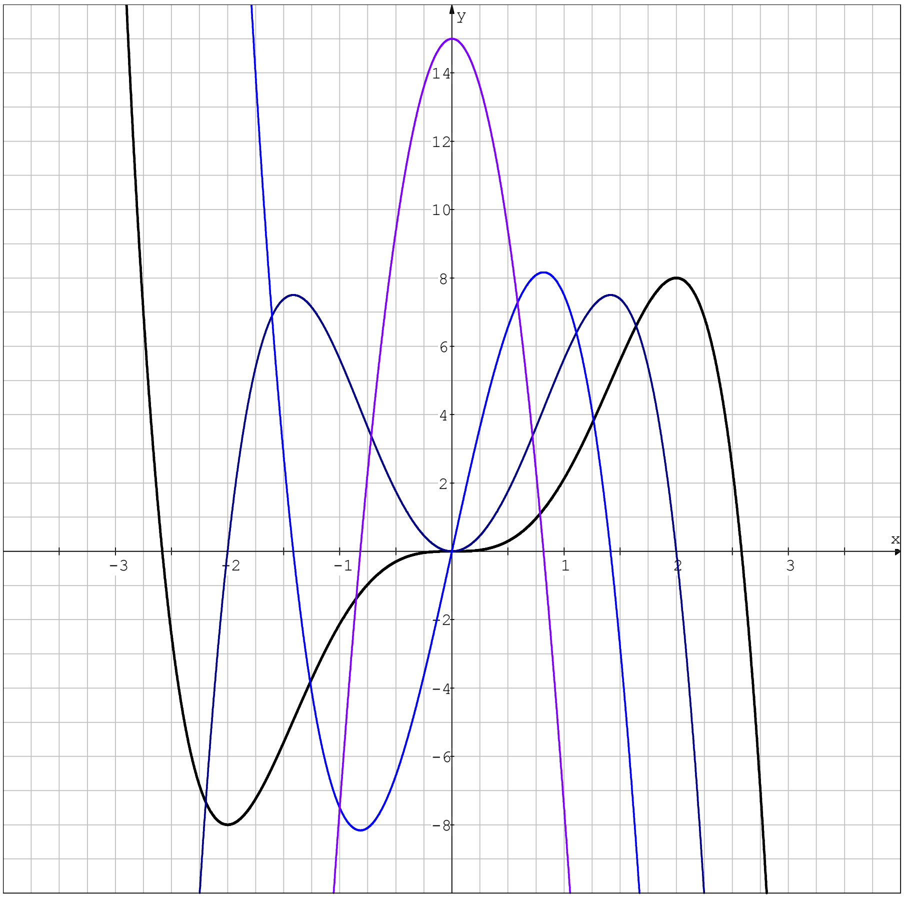
$D_{max}$ = R, W = R

f ist in R stetig und differenzierbar; $G_f$ ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

Nullstellen: $x_1 = 0$, $x_2 = \pm\sqrt{\frac{20}{3}}$

Ableitungen:
$f'(x) = \frac{15}{2} \cdot x^2 - \frac{15}{8} \cdot x^4 \quad f''(x) = 15 \cdot x - \frac{15}{2} \cdot x^3 \quad f'''(x) = 15 - \frac{45}{2} \cdot x^2$

Graph:




Monotonie: $G_f$ ist in ]-2; +2[ sicher streng monoton steigend, für x < -2 und für x > 2 streng monoton fallend.

Extrema liegen an den Stellen x = -2 (Minimum) und x = 2 (lokales Maximum) vor.

Wendepunkte: An den Stellen $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ und $x_3 = 0$ liegen Wendestellen vor. An der Stelle x = 0 liegt ein Terrassenpunkt vor.

**3. Beispiel: $f_k : y = \frac{1}{k} \cdot x^3 - k \cdot x^2,\ k > 0$**

Dieses Beispiel steht für eine Funktionenschar, aus der eine bestimmte Funktion dadurch herausgegriffen wird, dass der Scharparameter k einen bestimmten Wert annimmt.

Eigenschaften:

$D_{max} = R$, $W = R$, Nullstellen: $x = 0 \vee x = k^2$

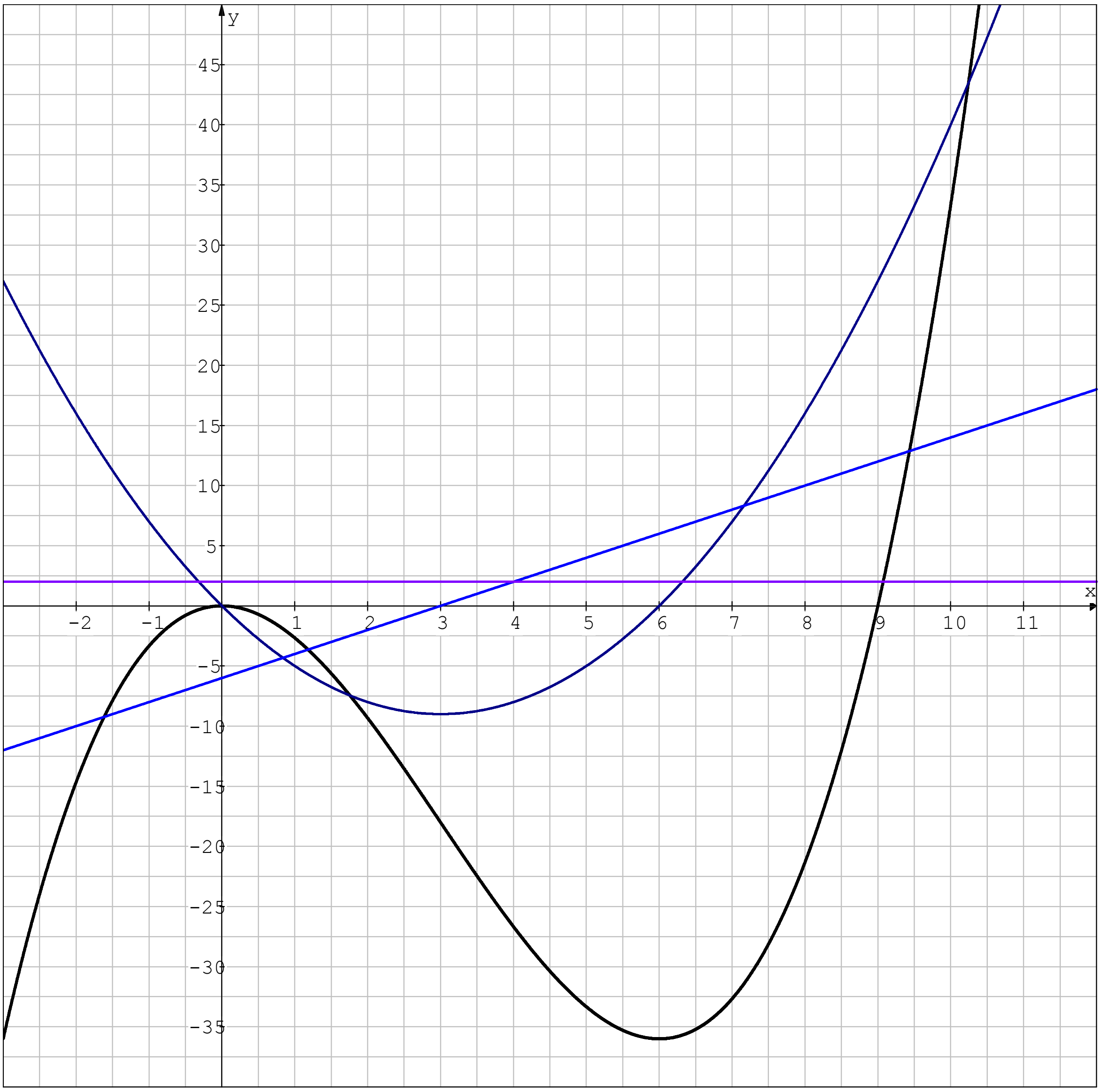
Ableitungen:
$f_k'(x) = \frac{3}{k} \cdot x^2 - 2 \cdot k \cdot x$ $f_k''(x) = \frac{6}{k} \cdot x - 2 \cdot k$ $f_k'''(x) = \frac{6}{k}$

Monotonie: Die Graphen von $f_k$ sind in I = ]0; 2k[ streng monoton fallend, in I* = R\[0; 2k] streng monoton steigend.

Extrema: Extrema liegen an den Stellen $x = 0$ (Max.) und $x = \frac{2}{3} \cdot k^2$ (Min.) vor.

Wendepunkte: Die Graphen von $k_k$ haben nur je einen Wendepunkt an der Stelle $x = 2k$.

Graph (für k = 3):




**Weitere Beispiele**

Nicht immer ist eine vorgegebene Funktion zu diskutieren. Es lässt sich zum Beispiel aus vorgegebenen Eigenschaften die Funktionsgleichung ermitteln.

Beispiel:
Bestimme eine ganzrationale Funktion 3. Grades mit folgenden Eigenschaften:
M(0; 0) ist lokaler Extrempunkt, W(-1; -2) ist Wendepunkt.

Aus dem allgemeinen Ansatz für die ganzrationale Funktion 3. Grades
$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
folgt für die Ableitungsfunktionen
$f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$ und
$f''(x) = 6a \cdot x + 2b$.
Dies liefert die Gleichungen
$f(0) = 0 \Leftrightarrow d = 0$
$f'(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$
$f(-1) = -2 \Leftrightarrow -a + b - c + d = -2$
$f''(-1) = 0 \Leftrightarrow -6a + 2b = 0$
Dieses Gleichungssystem wird gelöst durch a = -1, b = -3, c = 0, d = 0
und führt auf die Funktionsgleichung
$f(x) = -x^3 - 3 \cdot x^2$.

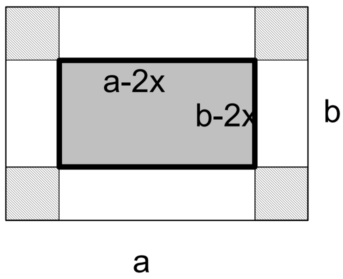
**Extremwertaufgaben**

Die Kurvendiskussion erlaubt die Behandlung so genannter Extremwertaufgaben. zur Verdeutlichung soll das nachfolgende Beispiel dienen:

Aus einem rechteckigen Stück Blech mit den Seitenlängen a = 8 cm und b = 5 cm werden an den Ecken kongruente Quadrate herausgestanzt (vgl. Skizze). Biegt man die Randstücke hoch, so erhält man eine quaderförmige, oben offene Wanne. Wie lang muss man die Quadratseite wählen, damit der Inhalt der Wanne möglichst groß wird?

Die fertige Wanne hat die Abmessungen x und z, ihr Volumen ist also gegeben durch

$V(x) = (a - 2x) \cdot (b - 2x) \cdot x = 4 \cdot x^3 - 26 \cdot x^2 + 40 \cdot x$ mit $x \in ]0$
.




mit den Ableitungen

$V'(x) = 12 \cdot x^2 - 52 \cdot x + 40$ und $V''(x) = 24 \cdot x - 52$.

Das Volumen wird sicher extrem, wenn
$V'(x) = 0$ und $V''(x) \neq 0$ gilt. Man erkennt leicht, dass

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow V'(x) = 12 \cdot x^2 - 52 \cdot x + 40 \Rightarrow x = 1 \vee x = \frac{10}{3}$

Die zweite Lösung ist nicht aus der Definitionsmenge, für die erste Lösung x = 1 wird die zweite Ableitung von Null verschieden:

$V''(1) = 24 \cdot 1 - 52 = -28 < 0$.

Die Volumenfunktion V(x) hat also an der Stelle x = 1 ein Maximum mit V(1) = 18. An den ohnehin aus der Definitionsmenge ausgeschlossenen Randstellen x = 0 und x = 2,5 würde V = 0 gelten, so dass kein Randmaximum vorliegt.

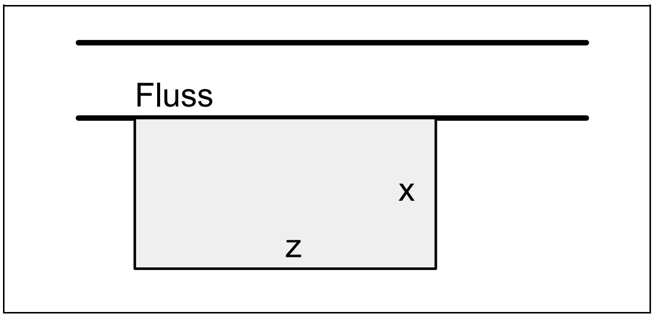
Folgerung: Wenn man an den Ecken des rechteckigen Blechs Quadrate mit der Seitenlänge x = 1 cm ausstanzt, dann erhält man eine offene Wanne mit dem maximalen Inhalt $V_{max} = 18\ cm^3$.

**Weitere Extremwertaufgaben**

Bei einer Reihe von Extremwertaufgaben ist die zu untersuchende Größe in einer Funktion (der sog. Hauptfunktion) von zwei oder mehr Variablen abhängig. Letztere sind jedoch durch eine Nebenbedingung untereinander verknüpft, so dass sich das Problem auf die Diskussion einer Funktion nur einer Variablen zurückführen lässt.

Bei einer derartigen Diskussion ist allerdings dafür Sorge zu tragen, dass das Ergebnis in einem sinnvollen Intervall liegt. Andernfalls liegen ggf. Randextrema vor.

1. Beispiel: Ein Rancher kann mit l = 100 m Zaun an einem Fluss ein möglichst großes rechteckiges Grundstück einzäunen. Die Flussseite erfordert keinen Zaun.




Welche Abmessungen soll er wählen; wie groß ist dann das Grundstück?

Lösung:
Hauptfunktion: $f(x, z) = x \cdot z$
Nebenbedingung: $2 \cdot x + z = 100\ m$
$z = 100\ m - 2 \cdot x$
$f(x) = x \cdot (100\ m - 2 \cdot x) = -2 \cdot x^2 + 100\ m \cdot x$
Die Funktion x nimmt sicher einen extremen (maximalen!) Wert an einer Stelle $x_0$ an, an der $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ ist.
$f'(x) = -4 \cdot x + 100\ m \wedge f''(x) = -4 < 0.$
$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow -4 \cdot x_0 + 100\ m = 0 \Leftrightarrow x_0 = 25\ m$
$z_0 = 100\ m - 2 \cdot 25\ m = 50\ m$
$A_{max} = x_0 \cdot z_0 = 25\ m \cdot 50\ m = 1250\ m^2.$
2. Beispiel: Eine zylindrische Konservendose soll V = 720 ml fassen. Wie sind die Abmessungen zu wählen, damit möglichst wenig Material verbraucht wird?

Lösung:
Hauptfunktion: $O(r, h) = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$
Nebenbedingung: $r^2 \cdot \pi \cdot h = V = const.$
$h = \frac{V}{r^2 \cdot \pi}$
$O(r) = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \frac{V}{r^2 \cdot \pi} = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot \frac{V}{r}$
Notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Extremums ist das Verschwinden der ersten Ableitung:
$O'(r) = 4 \cdot r \cdot \pi - \frac{2 \cdot V}{r^2}$

$O'(r_0) = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot r_0 \cdot \pi = \frac{2 \cdot V}{r_0^2} \Leftrightarrow r_0^3 = \frac{2V}{4\pi} \Leftrightarrow r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \Leftrightarrow d_0 = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot V}{\pi}}$ .

Für die zugehörige Höhe $h_0$ erhält man

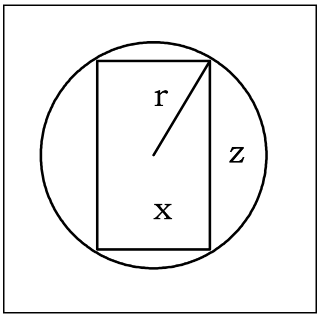
$h_0 = \frac{V}{\pi \cdot \left(\frac{V}{2 \cdot \pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = V \cdot \pi^{-1} \cdot (2\pi)^{\frac{2}{3}} \cdot V^{-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} \cdot \pi^{-\frac{1}{3}} \cdot V^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot V}{\pi}} = d_0!$.

Der minimale Materialverbrauch liegt also dann vor, wenn Höhe und Durchmesser gleich sind!

Anmerkung: Es lässt sich leicht zeigen, dass für den durch Rechnung erhaltenen Wert von r die zweite Ableitung von O tatsächlich kleiner als Null wird.

3. Beispiel: Aus einem Baumstamm mit konstantem Durchmesser d und konstanter Länge l soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt und maximaler Tragkraft herausgesägt werden. Die Tragkraft T ist proportional zur Breite x und zum Quadrat der Höhe z.

Skizze:




Hauptfunktion: $T(x, z) = C \cdot x \cdot z^2$
Nebenbedingung: $x^2 + z^2 = d^2$
$T(x) = C \cdot x \cdot (d^2 - x^2) = - C \cdot x^3 + C \cdot d^2 \cdot x$
Ableitungen:
$T'(x) = -3 \cdot C \cdot x^2 + C \cdot d^2 \quad T''(x) = -6 \cdot C \cdot x < 0$
Ein Maximum von T liegt wegen $T'' < 0$ sicher vor, wenn $T' = 0$ ist:
$-3 \cdot C \cdot x^2 + 2 \cdot C \cdot d^2 = 0$
$x^2 = \frac{C \cdot d^2}{3 \cdot C} = \frac{1}{3} \cdot d^2 \Rightarrow x = d \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{d}{3} \cdot \sqrt{3}$
Für z folgt daraus
$z^2 = d^2 - x^2 = d^2 - \frac{1}{3} \cdot d^2 = \frac{2}{3} \cdot d^2 \Rightarrow z = d \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{d}{3} \cdot \sqrt{6}$
Der Quotient aus z und x liefert
$\frac{z}{x} = \frac{\frac{d}{3} \cdot \sqrt{6}}{\frac{d}{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{1}$.

Anmerkung: Viele Balken haben die Höhe 14 cm und die Breite 10 cm in Übereinstimmung mit obigem Ergebnis.