A1 Aufbau des Zahlensystems

A1 Aufbau des Zahlensystems; Beherrschung der Grundrechenarten

Grundbegriffe der Mengenlehre

Beispiel: Von den Zeichen e, f, g, 2, %, k, #, s, r, § können nicht alle sinnvoll zusammengefasst werden. Dagegen bilden e, f, g, k, s, r eine Menge von Buchstaben.

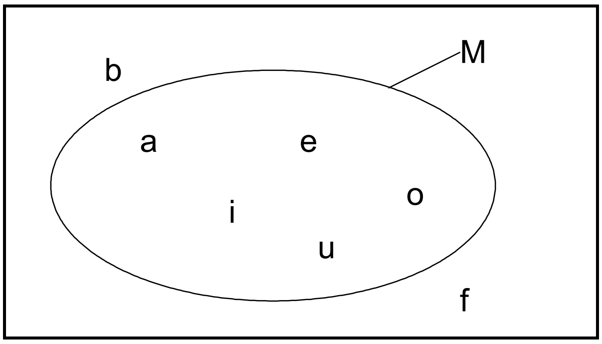
Definition: Unter einer Menge versteht man eine sinnvolle Zusammenfassung verschiedener Dinge. Diese Dinge heißen Elemente.

Weitere Beispiele:

- Die Menge der Monate eines Jahres
- Die Menge aller Selbstlaute

Mengen können auf unterschiedliche Arten dargestellt und zur Abkürzung mit großen Buchstaben bezeichnet werden. Dies soll am Beispiel der Menge der Selbstlaute verdeutlicht werden:

- aufzählendes Verfahren: M = {a, i, e, u, o}
- beschreibendes Verfahren: M = {alle Selbstlaute}
- Mengendiagramm



Zur Beschreibung, ob ein Ding ein Element einer Menge ist oder nicht, werden die Zeichen $\in$ (ist Element) und $\notin$ (ist nicht Element) eingeführt.

Anwendung:
M = {a, e, i, o, u}
$f \notin M$ $\qquad$ $u \in M$

Aus Gründen der mathematischen Vollständigkeit werden noch die einelementige Menge und die leere Menge { } vereinbart.

Beispiele:
A = {alle Lehrer, die derzeit in der Klasse anwesend sind} (einelementige Menge)
B = {alle über 4000 m hohen Berge in Deutschland} (leere Menge)

Bei der Beschreibung einer Menge kommt es auf die Reihenfolge der Aufzählung der Elemente nicht an. Es liegt daher die folgende Definition nahe:

> Def.: Zwei Mengen heißen gleich, wenn sie aus denselben Elementen bestehen.

Beispiel:
A = {2, 3, 4}, B = {3, 4, 2}, A = B

Oft interessiert auch die Anzahl der Elemente einer Menge M. Sie wird mit z(M) bezeichnet.

> Def.: Unter der Mächtigkeit z(M) einer Menge M versteht man die Anzahl der Elemente von M.

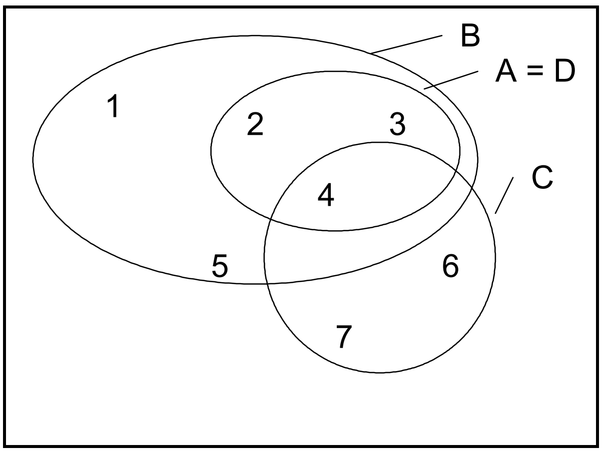
Beispiel:
M = {2, 3, 5}, z(M) = 3

Teilmengen

Beispiel:
A = {2, 3, 4}, B = {1, 4, 2, 3, 5}, C = {4, 6, 7}, D = {4, 2, 3}

Man erkennt leicht:
- A = D
- C hat weniger Elemente als B
- alle Elemente von A sind in B enthalten
- alle Elemente von A sind in D enthalten

Veranschaulichung:



Es wird Folgendes vereinbart:

Def.: A heißt Teilmenge von B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist. Schreibweise: $A \subseteq B$.

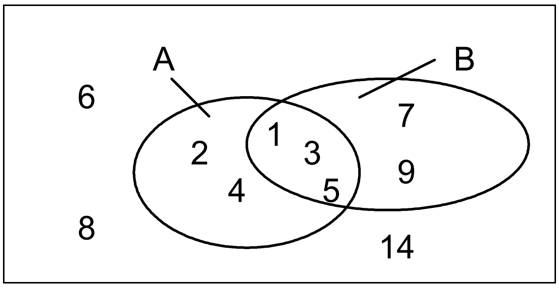
Anmerkungen:

1. Wenn zwei Mengen gleich sind, dann ist jede Menge (unechte) Teilmenge der anderen Menge.
2. Wenn eine Menge A Teilmenge von B ist und zugleich $z(A) < z(B)$ ist, dann heißt A auch echte Teilmenge von B; Schreibweise: $A \subset B$.
3. Die leere Menge ist Teilmenge einer jeden Menge.
4. Jede Menge ist (unechte) Teilmenge von sich selbst.

Schnittmenge, Vereinigungsmenge, Restmenge (Differenzmenge)

Gegeben sind in der Grundmenge $G = N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ die Mengen $A = \{1,2,3,4,5\}$ und $B = \{1,3,5,7,9\}$.

Mengendiagramm:



Die Elemente der Grundmenge lassen sich folgendermaßen einteilen:

1. nur in A enthalten
2. nur in B enthalten
3. in A und in B enthalten
4. mindestens in einer der beiden Mengen A und B enthalten.
5. weder in A noch in B enthalten.

Definitionen:

1. Unter der Schnittmenge $S = A \cap B$ zweier Mengen A und B versteht man die Menge derjenigen Elemente, die **sowohl in A als auch in B** enthalten sind.
2. Unter der Vereinigungsmenge $V = A \cup B$ zweier Mengen A und B versteht man die Menge derjenigen Elemente, die **in A oder auch in B** enthalten sind.
3. Unter der Differenzmenge $D = A \setminus B$ versteht man die Menge derjenigen Elemente von A, die nicht in B enthalten sind.

Schreibweisen: Das Zeichen für "geschnitten" ist ein unten offener ($\cap$), das Zeichen für "vereinigt mit" ein nach oben offener Halbkreis ($\cup$), das Zeichen für “ohne” ein Backslash.

In obigem Beispiel gilt: $S = A \cap B = \{1, 3, 5\}$, $V = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$, $D = A \setminus B = \{2, 4\}$, $D^* = B \setminus A = \{7, 9\}$

Anmerkungen:
1. Die Schnittmenge einer Menge A mit der leeren Menge ist stets die leere Menge, die Vereinigungsmenge einer Menge A und der leeren Menge ist die Menge A.
2. Die Schnittmenge zweier beliebiger Mengen ist stets Teilmenge jeder der beiden Mengen.
3. Zwei Mengen mit leerer Schnittmenge heißen elementefremd. Die Vereinigungsmenge elementefremder Mengen A und B hat genau so viele Elemente wie A und B zusammen. Sonst gilt $z(A \cup B) < z(A) + z(B)$.

Die Mengen der natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen

Beispiele:
1. 3, 5, 87, 3456, ...
2. -4, -999
3. 3, -5, 56, 0, -23456
4. $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{5}$, $-\frac{3}{7}$, $-2\frac{3}{4}$
5. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{47}$

Anmerkungen:
1. Die Zahlen unter 2. heißen Gegenzahlen der natürlichen Zahlen.
2. Die Zahlen unter 4. heißen Brüche.
3. Die Zahl $\sqrt{2}$ z. B. ist die positive Lösung der Gleichung $x^2 = 2$.

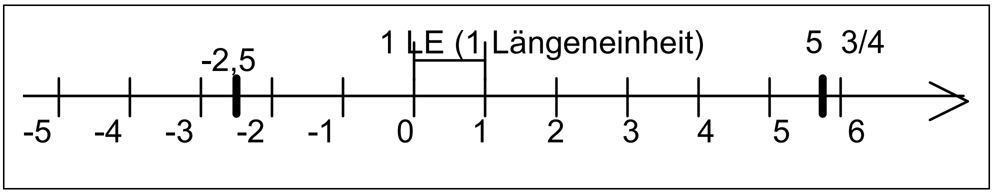
Die Zahlen, mit denen wir rechnen, gehören verschiedenen Klassen an. Diese werden folgendermaßen definiert:

Definitionen:
1. Die Zahlen des Abzählens heißen natürliche Zahlen, alle zusammen heißen Menge N der natürlichen Zahlen.
2. Die natürlichen Zahlen und ihre Spiegelzahlen bilden die Menge Z der ganzen Zahlen.
3. Die Menge der Brüche bildet die Menge der rationalen Zahlen Q.
4. Die Menge der rationalen Zahlen vereinigt mit der Menge der irrationalen Zahlen bildet die Menge R der reellen Zahlen.

Folgerung: Es gilt $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Zahlenmengen können auf dem Zahlenstrahl dargestellt werden, für den folgende Vereinbarungen gelten:

Ein Zahlenstrahl ist eine Halbgerade. Die Entfernung des Bildpunkts der Zahl “1” vom Bildpunkt der Zahl “0” heißt Längeneinheit. Jede Zahl hat auf dem Zahlenstrahl einen Bildpunkt. Einer Zahlenmenge wird auf diese Weise auf dem Zahlenstrahl eine Punktmenge zugeordnet.



Folgerungen:
1. Von zwei Zahlen ist der Bildpunkt der kleineren Zahl weiter links.
2. Die Bildpunkte zweier gleicher Zahlen fallen zusammen.

Grundrechenarten und ihre Rechenregeln

Wir unterscheiden die Grundrechenarten addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren.

Für sie gibt es Algorithmen für das schriftliche Rechnen:

1234567 + 5678 1240245	1234567 - 5678 1228889	12345·406 49380 0 74070 5012070	84042:406=207 -812 284 - 0 2842 -2842 0

Für diese Rechenarten gelten folgende Begriffsbildungen:

Operation	Addition	Subtraktion	Multiplikation	Division
Beispiel:	13 + 21 = 34	17 - 4 = 13	$3 \cdot 4 = 12$	12 : 4 = 3
Sprechweise	1. Summand plus 2. Summand = Summenwert	Minuend minus Subtrahend = Differenzwert	1. Faktor mal 2. Faktor = Wert des Produkts	Dividend dividiert durch Divisor = Quotientenwert
Term auf der linken Seite	Summe	Differenz	Produkt	Quotient

Anmerkungen:
1. Merke: Zwei Zahlen werden addiert, indem man gleiche Stellen untereinander schreibt und addiert.
2. Man kann nur Größen gleicher Einheit addieren! Beispiel: 3 m + 4 m = 7 m; aber: 3 m + 5 kg nicht möglich! Aber: $3\text{ N} \cdot 5\text{ m} = 15\text{ Nm}$; $20\text{kg} : 4\text{m}^2 = 5\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$

Rechengesetze

Beispiele:

$3 + 4 = 4 + 3$ (Kommutativgesetz der Addition)

$(3 + 4) + 5 = 3 + (4 + 5)$ (Assoziativgesetz der Addition)

$3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$ (Kommutativgesetz der Multiplikation)

$(3 \cdot 4) \cdot 5 = 3 \cdot (4 \cdot 5)$ (Assoziativgesetz der Multiplikation)

$(3 + 4) \cdot 5 = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5$ (Distributivgesetz)

aber:

$4 - 3 \neq 3 - 4$
$3 : 4 \neq 4 : 3$

Zusammenfassung:
1. Was in Klammern steht, wird zuerst berechnet! Wenn mehrere Klammen stehen, dann beginnt man stets mit der Berechnung der innersten Klammer!
2. Für alle reellen Zahlen a, b, c gelten das Assoziativgesetz (Anordnungsgesetz) $(a + b) + c = a + (b + c)$ und das Kommutativgesetz der Addition $a \cdot b = b \cdot a$.
   Für alle reellen Zahlen gilt das Distributivgesetz (Verteilungsgesetz) $(a \pm b) \cdot c = a \cdot c \pm b \cdot c$ bzw. $(a \pm b) : d = a : d \pm b : d$ ($d \neq 0$!).

Anmerkung:
Assoziativ- und Kommutativgesetz bieten oft Rechenvorteile. Beispiele:
1. $75 + 89 + 25 =$ (K-Gesetz)
   $= 89 + 75 + 25 =$ (A-Gesetz)
   $= 89 + (75 + 25) =$
   $= 89 + 100 = 189$
2. $((4 + 3) + (7 + 5)) + (8 + 2) = (7 + 12) + 10 = 19 + 10 = 29$

Die Aggregatregel

Begriffsbestimmung: Ein Aggregat ist ein Zusammenschluss bzw. eine Verbindung von einfachen Teilen zu einem komplizierten Teil.

Beispiel: **E**innahmen und **A**usgaben in der Klassenkasse:
E 27 DM (alter Kassenstand), E 12 DM , A 4 DM, A 18 DM, E 43 DM, A 7 DM
Neuer Kassenstand: 27 DM + 12 DM - 4 DM - 18 DM + 43 DM - 7 DM = 53 DM
Ein Term dieser Form heißt Aggregat. Sein Wert kann nach Kennzeichnung aller positiven und aller negativen Glieder leicht berechnet werden:
(27 DM + 12 DM + 43 DM) - (4 DM + 18 DM + 7 DM) = 82 DM - 29 DM = 53 DM

Zusammenfassung:
In einem Aggregat (Term 1. Stufe) subtrahiert man die Summe der negativen Glieder von der Summe der positiven Glieder.
Positiv sind das erste Glied und alle Glieder mit einem Pluszeichen vor der Zahl, negativ alle Glieder mit einem Minuszeichen vor der Zahl.

Weitere Rechenregeln und Definitionen

Beispiele:
1. $3 \cdot 4 \cdot 3450 \cdot 0 = 0$
2. $345 \cdot x \cdot 456789 = 0 \Rightarrow x = 0$
3. $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
4. $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$
5. $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$
6. $2 + 3 \cdot 4^2 = 2 + 3 \cdot 16 = 2 + 48 = 50$

Zusammenfassung:
1. Hat ein Produkt mit beliebig vielen Faktoren einen Faktor 0, so ist der Wert des Produktes 0.
2. Ist der Wert eines Produktes 0, so muss mindestens ein Faktor 0 sein.
3. “Potenz vor Punkt vor Strich"

Definitionen:
1. Unter der Potenz a^n ($a \in N$, $n \in N\backslash\{1\}$) versteht man das Produkt aus n gleichen Faktoren a: $a^n = a * a * a * ... * a$ (n Faktoren)
2. Für alle natürlichen Zahlen a gilt: $a^1 = a$
3. Potenzen mit dem Exponenten 2 heißen Qudrate; Zahlen, die sich als Quadrate schreiben lassen, heißen Quadratzahlen.
4. Jede Zehnerpotenz 10^n ist eine Stufenzahl; der Exponent gibt die Zahl der Nullen der Stufenzahl an.

Beispiele:
1. $10^1 = 10$
2. $10^2 = 100$
3. $10^3 = 1000$
4. $10^6 = 1000000$
5. $10000 = 10 * 10 * 10 * 10 = 10$
6. $2000 = 2 * 1000 = 2 * 10^3$

Die Werte der Potenzen nehmen sehr rasch zu, wenn die Basis größer als Null ist und die Exponenten steigen.

Beispiel: Möbelhändler Stuhlbein bietet Stühle zu einem Stückpreis von 100 DM an, Händler Sesselmann verlangt für den ersten Stuhl 1 DM, für den zweiten 2 DM, für den dritten 4 DM usw.

Welches Angebot ist günstiger, wenn 12 Stühle gebraucht werden?

Lösung:
Die Stühle bei Stuhlbein kosten 12 * 100 DM = 1200 DM
Bei Sesselmann kostet die Stühle unterschiedlich viel:

Stuhl 1	1 DM	1 DM
Stuhl 2	2 DM	2^1 DM
Stuhl 3	4 DM	2^2 DM
Stuhl 4	8 DM	2^3 DM
Stuhl 12	2048 DM	2^{11} DM

Ergebnis: Das Angebot von Stuhlbein ist günstiger!

Terme

Beispiel:

In der Fahrschule lernt man folgende Faustregel: Zur Berechnung des Bremswegs s teile man die Geschwindigkeit v (in $\frac{km}{h}$) durch 10 und multipliziere das Ergebnis mit sich selbst: $s = (\frac{v}{10})^2$.

Definition: Rechenausdrücke wie $(\frac{v}{10})^2$, 3:r, |a| - 1, x · (-2) - 3 sind Beispiele für Terme mit einer Variablen. Erst wenn man eine Zahl aus einer Grundmenge G für die Variable einsetzt, nimmt der Term einen Wert an.

Nicht immer enthält ein Term nur eine einzige Variable:

$x \cdot (y-1),\ 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 4,\ 5x - 3y = z$

sind Beispiele für Terme mit mehreren Variablen. In einem Term muss eine Variable immer mit derselben Zahl belegt werden.

Beispiel:

Gliedere den Term $T(x, y) = x^2 - 3y$ für x ∈ {1, -2, 3} und y ∈ {4, -5} und berechne die Termwerte für die angegebenen Einsetzzahlen.

Lösung:
Der Term ist eine Differenz; der Minuend besteht aus dem Quadrat von x, der Subtrahend aus dem Produkt aus der Variablen y und der Zahl 3.

x	1	1	-2	-2	3	3
y	4	-5	4	-5	4	-5
$x^2 - 3y$	-11	16	-8	19	-3	24

Addieren und Subtrahieren von Termen

Grundaussage: Für das Rechnen mit Termen gelten dieselben Rechenregeln und Rechengesetze (Assoziativgesetz, Kommutativgesetz, Distributivgesetz) und Definitionen wie für das Rechnen mit Zahlen.

Beispiele:

1. $4u - (3u^2 + 3u) = 4u - 3u^2 - 3u = u - 3u^2$
2. $x - (y^2 - 2x) + y^2 = x - y^2 + 2x + y^2 = 3x$

Zusammenfassung: Umformungen, die nach den Klammerregeln und nach den Rechenregeln Kommutativ- und Assoziativgesetz erlaubt sind, führen einen Term in einen dazu äquivalenten Term über. Summen können vereinfacht werden, wenn gleichartige Summanden zusammengefasst werden. Analoges gilt für Differenzen.

Ausmultiplizieren von Summen

Beispiele:

1. Nach dem Distributivgesetz gilt: $(2 + v) \cdot x = 2x + vx$
2. aber: $(x^2 \cdot 5x) : x = x^2 \cdot 5$
3. Mit wiederholtem Anwenden des Distributivgesetzes kann auch der nachfolgende Term umgeformt werden:
   $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$.

Zusammenfassung:

Eine Summe wird mit einer Zahl multipliziert, indem man jeden Summanden mit der Zahl multipliziert und die Produkte addiert:
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Zwei Summanden werden multipliziert, indem man jeden Summanden der ersten Klammer mit allen Summanden der zweiten Klammer multipliziert und die Produkte addiert ("jeder mit jedem"):
$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + b \cdot c + a \cdot d + b \cdot d$.

Graphische Veranschaulichung:

Produkte von Zahlen bzw. Variablen können als Flächeninhalte von Rechtecken veranschaulicht werden. Dann gilt:

	a	b
x	a mal x	b mal x
y	a mal y	b mal y

Anmerkung: Die Regel “jeder mit jedem” gilt auch für mehrgliedrige Summen!

Binomische Formeln

Mit den Regeln für das Ausmultiplizieren von Summen lassen sich leicht die sog. binomischen Formeln herleiten:

$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + a \cdot b + b \cdot a + b^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - a \cdot b - b \cdot a + b^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$

$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - a \cdot b + b \cdot a - b^2 = a^2 - b^2$

Neben diesen bekannten Formeln sollte man sich noch merken:

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 \pm b^3$

sowie

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b) \cdot (a^2 \mp a \cdot b + b^2)$

Zusammenfassung:
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2$
$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - a \cdot b + b \cdot a - b^2 = a^2 - b^2$

Faktorisieren von Summen

Berechne möglichst schnell:
Merke dir eine Zahl. Verzehnfache sie und addiere zehn. Das Zwischenergebnis multipliziere mit dem Vorgänger deiner Zahl und dividiere schließlich durch den Vorgänger des Quadrats deiner Zahl.

Die verlangte Rechnung lässt sich so schreiben:

$[(10 \cdot x + 10) \cdot (x - 1)] : (x^2 - 1) =$
$10 \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) : [(x + 1) \cdot (x - 1)] = 10$

Das Verwandeln einer Summe $(x^2 - 1)$ in ein Produkt nennt man das Faktorisieren einer Summe, hier durch Anwenden einer binomischen Formel.

Eine Faktorzerlegung gelingt immer, wenn alle Summanden einen gemeinsamen Faktor enthalten; dann liefert das Distributivgesetz ein Produkt.

Beispiel:
$3a - 21b + 6{,}3c = 3 \cdot (a - 7b + 2{,}1c)$

Aber auch Summen, deren Summanden keinen gemeinsamen Faktor enthalten, lassen sich manchmal faktorisieren, z. B. durch mehrmaliges Ausklammern.

Beispiel:
$xy - xz + sy - sz = x \cdot (y - z) + s \cdot (y - z) = (x + s) \cdot (y - z)$

Zusammenfassung:
Durch Ausklammern nach dem Distributivgesetz oder Anwendung der binomischen Formeln kann man bestimmte Summen faktorisieren.

Bruchterme

Wiederholung:
Alle sinnvollen Zusammensetzungen von Zahlen und Variablen mit Hilfe von Rechenzeichen heißen Terme. Durch Teilen von Termen entstehen Bruchterme.

Definition:
Der Quotient zweier Terme heißt Bruchterm, wenn der Nenner mindestens eine Variable enthält.

Generell sind mit Bruchtermen alle Rechenoperationen möglich, die auch mit “normalen” Brüchen denkbar sind (kürzen, erweitern, ausführen der Grundrechenarten). Es jedoch darauf zu achten, ob sich bei den Rechenoperationen die Definitionen ändern oder nicht.

Im Folgenden sollen einige Beispiele betrachtet werden.

- Kürzen von Bruchtermen:

Wir betrachten den Term $\frac{3x}{2x-x^2}$ mit der Definitionsmenge D = R\{0; 2}.
$\frac{3x}{2x-x^2} = \frac{3x}{x\cdot(2-x)} = \frac{3}{2-x}$
Der Ausgangsterm und der gekürzte Term sind in der Definitionsmenge D äquivalent, während der gekürzte Term sogar in D* = R\{2} erklärt ist.

- Erweitern von Bruchtermen:

Es soll der Term $\frac{a}{a+2}$ durch erweitern auf den Nenner $a^2 - 4$ gebracht werden.
$\frac{a}{a+2} = \frac{a\cdot(a-2)}{(a+2)\cdot(a-2)} = \frac{a^2-2a}{a^2-4}$
In der Definitionsmenge D* = R\{-2; +2} sind beide Terme äquivalent, während der Ausgangsterm sogar in D = R\{-2} erklärt ist.

- Addieren und Subtrahieren von Bruchtermen

Gleichnamige Bruchterme werden addiert (subtrahiert), indem man die Zähler addiert (subtrahiert).
Ungleichnamige Bruchterme werden vor dem Addieren (Subtrahieren) auf gemeinsamen Nenner gebracht.

Beispiel:
$\frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{2x} = \frac{4\cdot 2x - 2\cdot 2 + 1\cdot x}{2x^2} = \frac{8x-4+x}{2x^2} = \frac{9x-4}{2x^2}$ $(D = R\backslash\{0\})$

- Multiplizieren und Dividieren von Bruchtermen

Auch hierbei wird verfahren wie bie den entsprechenden Operationen mit Zahlen.

Beispiele:
$\frac{4a^2}{3b^2} \cdot \frac{15b}{16a} = \frac{4a^2\cdot 15b}{3b^2\cdot 16a} = \frac{a\cdot 4a\cdot 3b\cdot 5}{3b\cdot b\cdot 4\cdot 4a} = \frac{5a}{4b}$ $(a \neq 0, b \neq 0)$

$\frac{2a+2}{a+2} : \frac{4+4a}{4-a^2} = \frac{2\cdot(a+1)\cdot(2+a)\cdot(2-a)}{(a+2)\cdot 4\cdot(1+a)} = \frac{2\cdot(2-a)}{2\cdot 2} = \frac{2-a}{2}$ $(a \neq \pm 2,\ a \neq -1)$

Bruchgleichungen

Definition: Unter einer Bruchgleichung versteht man eine Gleichung mit Variablen im Nenner.

Beispiele:

$\frac{x}{x-2} = \frac{1}{3}$ $(D = R\backslash\{2\})$ $\quad \frac{x}{x-2} - \frac{1}{3} = 0 \quad \frac{3\cdot x - 1\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot 3} = 0 \quad \frac{3\cdot x - x + 2}{(x-2)\cdot 3} = 0$

$\frac{2\cdot x+2}{(x-2)\cdot 3} = 0 \quad 2x + 2 = 0 \quad 2x=-2 \quad x=-1 \quad L=\{-1\}$

$\frac{x-6}{x\cdot(x-1)} + \frac{5}{x-1} = \frac{5}{x}$ (unlösbar)

$\frac{1}{3-x} + \frac{1}{x+4} = \frac{7}{(3-x)\cdot(x+4)}$ (allgemeingültig)

Zusammenfassung:
Die Lösungsmenge einer Bruchgleichung wird bestimmt, indem man
a) alle vorkommenden Bruchterme auf den Hauptnenner bringt,
b) mit dem Hauptnenner durchmultipliziert und vollständig kürzt,
c) die Lösungen der entstehenden (bruchtermfreien) Gleichung bestimmt,
d) prüft, welche dieser Zahlen zur Definitionsmenge der Bruchgleichung gehören.

Polynomdivision

Definition:
$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ...a_i \cdot x^i + ...a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \; (n \in N; a_n, ..., a_0 \in R; a_n \neq 0)$
heißt Polynom n-ten Grades in x.

Beispiel: $P(x) = 5 \cdot x^3 - 2,5 \cdot x + 4$ ist ein Polynom 3. Grades in x mit den Koeffizienten $a_3 = 5,\; a_2 = 0,\; a_1 = -2,5,\; a_0 = 4$.

Zur Erinnerung: Der Wert des Quotienten 3852 : 12 kann so berechnet werden:

```
 3852:12=321
-36
  25
 -24
   12
  -12
    0
```

Dieses Verfahren kann leicht auf die sog. Polynomdivision übertragen werden:

$$
\begin{array}{l}
\;\;(3x^3 + 8x^2 + 5x + 2) : (x + 2) = 3x^2 + 2x + 1 \\
\underline{-(3x^3 + 6x^2)} \\
\qquad\quad 2x^2 + 5x \\
\qquad \underline{-(2x^2 + 4x)} \\
\qquad\qquad\qquad x + 2 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-(x + 2)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad -
\end{array}
$$

Zusammenfassung: Man dividiert die höchste Potenz des Dividenden durch die höchste Potenz des Divisors und notiert das Ergebnis. Dann bildet man das Zwischenprodukt und subtrahiert dieses vom Dividenden. Nun setzt man das Verfahren so lang fort, bis schließlich die Division aufgeht oder der Grad des Restpolynoms kleiner ist als der Grad des Divisors. Im letzten Fall gibt man das Resultat in der Schreibweise an, die den gemischten Zahlen entspricht.

Weiteres Beispiel:

$(2x^2 + 3x + 1) : (2x + 5) = x - 1 + \frac{6}{2x+5}$