A2 Lineare Gleichungen und Funktionen

A2.1 Aussage und Aussageform; Bestimmung von Definitions- und Lösungsmenge bei linearen Gleichungen

Aussage und Aussageform

> Definition: Unter einer Aussage versteht man ein sprachlich sinnvolles Gebilde, von dem feststeht, ob es wahr oder falsch ist. Bei allen anderen gesprochenen oder geschriebenen Sätzen ist entweder nicht entscheidbar, ob sie wahr oder falsch sind, oder sie sind sinnlos und damit keine Aussagen.

Beispiele:
- Bei Bruchtermen darf der Nenner nie Null werden (w).
- Wenn man einen Bruchterm kürzt, dann bleibt die Definitionsmenge immer unverändert (f).
- Mühldorf ist größer als 5 m (sinnlos).
- 3 ist Teiler von 5 (f).
- 3 ist Teiler von z (keine Aussage).
- $8 \cdot x = y$ (keine Aussage).

Die beiden letzten Sätze führen auf eine neue

> Definition: Wenn man Teile einer Aussage durch Variable ersetzt, dann entsteht eine Aussageform. Erst durch einsetzen anstelle der Variablen kann man entscheiden, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

Aussageformen werden behandelt wie Gleichungen, d. h. es wird in einer Grundmenge nach Elementen gesucht, die aus der Aussageform eine wahre Aussage machen.

Beispiele:
1. X ist ein Nadelbaum; G = {Eiche, Buche, Birke}; L = { }
2. X ist ein Nadelbaum; G = [Fichte, Tanne, Buche}; L = {Fichte, Tanne}

Weiteres Beispiel:
Bilde eine Aussageform mit der Lösungsmenge L = {-1; 0; 1}
Eine Möglichkeit: $|x| < 2$; G = Z.

Lineare Gleichungen

Wiederholung:

1. $2a + 1 = 5$
2. $7a - 5 < 18$

sind Beispiele für Gleichungen (1) und Ungleichungen (2).

Sie werden gelöst, indem anstelle der Variablen ein oder mehrere Elemente der Grundmenge eingesetzt werden, die aus der Aussageform eine wahre Aussage machen.

Für die vorstehenden Beispiele gilt z. B. in der Grundmenge G = R:

1. $2a + 1 = 5$; G = R; L = {2}
2. $7a - 5 < 18$; G = R; $L = \left]-\infty; \frac{23}{7}\right[$

Im Folgenden sollen lineare Funktionen untersucht werden, d. h. Gleichungen wie $5a - 4 = 7$ oder $3 \cdot (2x - \frac{1}{2}) = 4 - 2 \cdot (1 - x)$, aber nicht z. B. $x^2 - 1 = 3$.

Definition: Gleichungen, in denen nur die erste Potenz der Variablen vorkommt, heißen lineare Gleichungen.

Als Lösungsstrategien bieten sich alle Äquivalenzumformungen (Hochzählen, Umstellen usw.) an.

Beispiel:

$7x + 2 = 3x + 10$; G = R;	/-2
$7x = 3x + 8$	/-3x
$4x = 8$	/:4
$x = 2$	

Probe: x = 2 in die Ausgangsgleichung eingesetzt erfüllt diese!

Die Lösungsmenge einer Gleichung (mit G = R) ändert sich nicht, wenn man auf beiden Seiten dieselben Rechenoperationen ausführt (Äquivalenzumformungen).

Anmerkungen:

1. “Durchmultiplizieren” einer Gleichung mit 0 ist im Allgemeinen keine Äquivalenzumformung. $2 \cdot x = 6$ hat die Lösungsmenge L = {3}. Wenn man dagegen die Gleichung mit 0 multipliziert, erhält man L = R.
2. Beidseitiges Multiplizieren mit einem Term ist im Allgemeinen keine Äquivalenzumformung. Wenn man $2 \cdot x = 6$ z. B. mit x multipliziert, erhält man die (nicht mehr lineare) Gleichung $2 \cdot x^2 = 6 \cdot x$ mit der Lösungsmenge L = {0; 3}.

Lineare Ungleichungen sind leicht analog zu den linearen Gleichungen zu lösen; lediglich beim Multiplizieren mit einer negativen Zahl bzw. beim Dividieren ist zu beachten, dass sich dann die Richtung des Ungleichheitszeichens umkehrt.

Beispiele:

$3x - 4 < 0$
$3x < 4$
$x < \frac{4}{3};\ L = \left]-\infty; \frac{4}{3}\right[$
oder
$3x - 4 < 0$
$-4 < -3x$
$\frac{-4}{-3} > x$
$x < \frac{4}{3};\ L = \left]-\infty; \frac{4}{3}\right[$

$1{,}2 - 0{,}8x < 5{,}4 - 0{,}4x$
$0{,}4x - 0{,}8x < 5{,}4 - 1{,}2$
$-0{,}4x < 4{,}2$
$x > 4{,}2 : (-0{,}4) = 10{,}5$
$L =]10{,}5; +\infty[$

Oft führen auch Bruchgleichungen bzw. Bruchungleichungen auf lineare (Un-)Gleichungen.

Beispiele:

$\frac{1}{x} + \frac{x}{x-1} = 1;\ D = R\backslash\{0; 1\}$
$x - 1 + x^2 = x^2 - x$
$2x = 1$
$x = \frac{1}{2};\ L = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

$\frac{x-2}{x+5} < 0;\ D = R\backslash\{-5\}$
rechnerische Lösung mit Fallunterscheidung:
1. Fall: $x - 2 < 0$ und $x + 5 > 0$
$x < 2$ und $x > -5$
$L_1 =]-5; 2[$
2. Fall: $x - 2 > 0$ und $x + 5 < 0$
$x > 2$ und $x < -5$
$L_2 = \{\ \}$
$L = L_1 \cup L_2 =]-5; 2[$