A2.2 Lineare Funktionen

Funktionen

Beispiel: Ein bestimmter Stromtarif berechnet den Strompreis P aus der Zählermiete M und dem Arbeitspreis aus Kosten K je kWh und Anzahl N der verbrauchten Einheiten:

$P = K \cdot N + M$
(P: abhängige Variable; N: unabhängige Variable; K, M: Konstanten)

Abstraktion zu üblichen Bezeichnungen:
$y = m \cdot x + t$

> Definition: Eine Zuordnung, die jedem Element $x \in R$ genau eine Zahl $y \in R$ zuordnet, heißt reelle Funktion mit der Definitionsmenge D. Die Menge der zugeordneten Zahlen heißt Wertemenge $W \subseteq R$.

Im Zusammenhang mit der Darstellung von Funktionen sind folgende Bezeichnungen und Schreibweisen üblich:

1. $f : D \to W \subseteq R$ (allgemein)
2. $f : x \to y = f(x);\ x \in R$
3. $f : y = f(x);\ x \in R$ (Funktionsgleichung)

Die wesentlichen Möglichkeiten, eine Funktion darzustellen, sind:

1. eine Zuordnungsvorschrift, z. B. eine Funktionsgleichung
2. eine Wertetabelle
3. ein Funktionsgraph

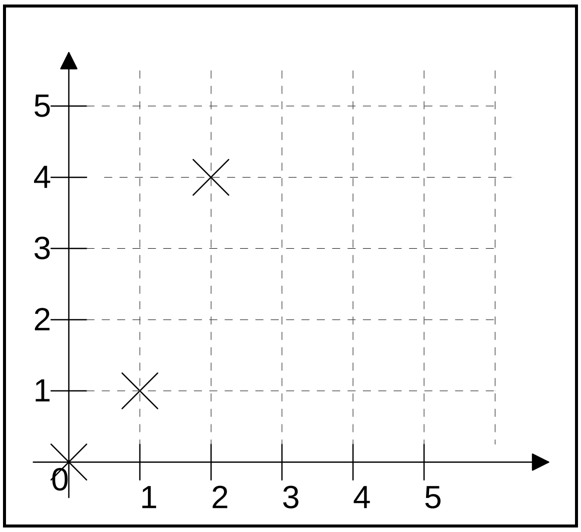
Beispiel:
1. Die Zuordnung Schüler -> Note ist eine eindeutige Zuordnung (jeder Schüler erhält genau eine Note)
2. Die Zuordnung Note -> Schüler ist im Allgemeinen keine eindeutige Zuordnung (einer Note können mehrere Schüler zugeordnet werden)

Graphen

Ein wesentliches Hilfsmittel zur Darstellung von Funktionen sind Graphen. Dabei werden die unabhängige Variable (x) und die abhängige Variable (y) als Koordinaten von Punkten verstanden und diese in ein Koordinatensystem eingezeichnet. Die Gesamtheit der so entstandenen Punkte heißt Graph der Funktion.

Beispiel: Eine Funktion sei gegeben durch die Funktionsvorschrift $f: x \to x^2$ mit D = {0; 1; 2}. Dann folgt für die Wertemenge W = {0; 1; 4}.

Der zugehörige Graph enthält nur drei Punkte:



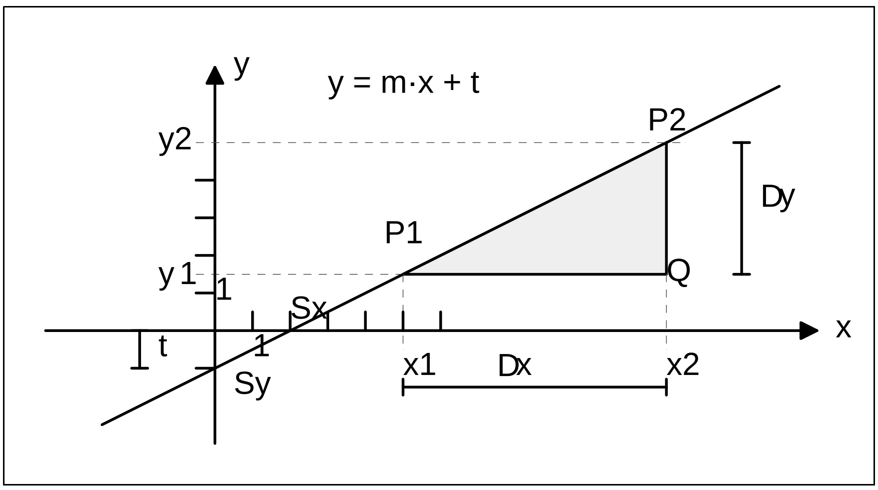
Anmerkung: Graphen, die eine Parallele zur y-Achse öfter als einmal schneiden, sind keine Funktionsgraphen, da dann einem x-Wert mehrere y-Werte zugeordnet sind, also keine eindeutige Zuordnung vorliegt.

Definition, Grundeigenschaften der linearen Funktion

Definition: Eine Funktion f: $x \to m \cdot x + t$ ($D = R$; $m, t \in R$) heißt lineare Funktion. Die Funktionsgleichung heißt Geradengleichung, m heißt Steigung, t heißt y-Achsenabschnitt.

Es ist leicht zu erkennen, dass für D = R auch W = R gilt, und dass der Graph der Funktion eine Gerade ist.

Als Beispiel soll im Folgenden die Funktion $f: x \to \frac{1}{2} \cdot x - 1$ betrachtet werden.



Zur exemplarischen Bestätigung der Geradeneigenschaft des Graphen dient ein Auszug aus der Wertetabelle:

x	-2	-1	0	1	2	3	-0,5	0,5	1,5
y=f(x)	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	-1,25	-0,75	-0,25

Die Formvariable t ist der Funktionswert an der Stelle 0, d. h. f(0) = t; der Punkt $S_y(0; t)$ ist der Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse. In unserem Beispiel gilt $S_y(0; -1)$

Den Schnittpunkt mit der x-Achse erhält man, indem man den Funktionswert gleich Null setzt:
$m \cdot x + t = 0 \Rightarrow x = -\frac{t}{m}$
In unserem Beispiel gilt $x = -\frac{-1}{\frac{1}{2}} = 2$, also S_x2; 0).

Eine Stelle $x \in D$ mit f(x) = 0 heißt Nullstelle der Funktion f.

Folgerung: In den Nullstellen von f hat G_f Punkte mit der x-Achse gemeinsam.

Den Begriff Steigung kann man nach folgender Definition leicht verstehen:

Definition: Unter der Steigung m einer Geraden versteht man den Differenzenquotienten $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Für beliebige Punkte $P_1(x_1;y_1)$ und $P_2(x_2;y_2)$ gilt:
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{m \cdot x_2 + t - (m \cdot x_1 + t)}{x_2 - x_1} = \frac{m \cdot x_2 - m \cdot x_1}{x_2 - x_1} = \frac{m \cdot (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = m$
unabhängig von der konkreten Wahl der Punkte P_1 und P_2! Für unsere konkrete Funktion folgt daraus unmittelbar $m = \frac{1}{2}$.

Die Steigung m einer Geraden kann mit dem Steigungsdreieck leicht bestimmt werden: Durch P_1 und P_2 ist ein rechtwinkliges Dreieck mit achsenparallelen Katheten $[P_1Q]$und $[P_2Q]$ sowie der Strecke $[P_1P_2]$ als Hypotenuse bestimmt. Hierbei gilt
$\frac{\overline{P_2Q}}{\overline{P_1Q}} = |m| \Rightarrow \overline{P_2Q} = |m| \cdot \overline{P_2Q} \Leftrightarrow \Delta y = |m| \cdot \Delta x.$

Von einem beliebigen Punkt $P_1 \in G_f$ kann dann leicht ein zweiter Punkt so gefunden werden: Von P_1 aus geht man ein beliebiges Stück Δx nach rechts und dann ein |m|-faches Stück nach oben (für m > 0) bzw. nach unten (für m < 0). Der Endpunkt dieser Strecke liefert dann einen zweiten Geradenpunkt P_2, so dass die Gerade gezeichnet werden kann.

In unserem Beispiel sei $P_1(5; 1,5)$. Mit $\Delta x = 7$ folgt $\Delta y = 3,5$ und daraus der Punkt $P_2(12; 5)$.

Ein weiteres Beispiel soll das bisher Überlegte verdeutlichen:

Es sei f: $x \to 2 \cdot x - 6$, D = R, gegeben.

Die obigen Überlegungen liefern sofort
t = -6, m = 2 und die Schnittpunkte $S_y(0; -6)$ und $S_x(3; 0)$ mit den Koordinatenachsen.

Formen der Geradengleichung

1. Fall: Ein Punkt $P_1(x_1; y_1)$ und die Steigung m seien gegeben. Dann gilt für beliebige Punkte $P(x; y) \in G_f$
$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-y_1}{x-x_1} \Rightarrow y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$,
als Geradengleichung die Gleichung
$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$ (Punkt-Steigungs-Form der Geraden).

2. Fall: Zwei Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ einer Geraden g seien gegeben. Dann gilt für beliebige Punkte $P(x; y) \in g$
$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{x-x_1} \Rightarrow y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \cdot (x - x_1)$,
als Geradengleichung also die Gleichung
$y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \cdot (x - x_1)$ (Zwei-Punkte-Form der Geraden).

3. Fall: Die beiden Achsenschnittpunkte A(a; 0) und B(0; b) einer Geraden g seien gegeben.
Dann lassen sich die Koordinaten dieser Schnittpunkte unmittelbar in die Gleichung für den 2. Fall einsetzen:
$y - 0 = \frac{b-0}{0-a} \cdot (x - a) = y = -\frac{b}{a} \cdot (x - a) = -\frac{b}{a} \cdot x + b$.
Daraus folgt mit kleinen Umformungen
$\frac{b}{a} \cdot x + y = b$ bzw. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (Achsenabschnittsform der Geraden).

Beispielaufgaben:
1. Stellen Sie die Geradengleichung aus P(3; -2) und m = 2 auf. Prüfen Sie dann, ob Q(5; 2) und R(-2; 3) auf der Geraden liegen.
2. Stellen Sie die Geradengleichung aus P(4;-3) und Q(1; 3) auf.
3. Überlegen Sie, warum der Graph zu f: $x \rightarrow -2 \cdot x$ Ursprungsgerade heißt.
4. Zeichnen Sie den Graphen zu f: $x \rightarrow -2 \cdot x + 1$ im Intervall I = [-3; +3].
5. Durch welche (Un-)Gleichung können Sie die Menge aller Punkte beschreiben, die oberhalb der Geraden mit der Gleichung y = x - 1 liegen?
6. Stellen Sie die Geradengleichung zur Funktion f: $x \rightarrow 2 \cdot x - 3$ in der Form $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ (implizite Form) dar.
7. Eine Gerade g schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten A(3; 0) und B(0; -4). Berechnen Sie die Geradengleichung und geben Sie die Steigung m an.
8. Eine Gerade habe die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen A(a; 0) und B(0; b). Zeigen Sie, dass sich die zugehörige Gerade in der Form $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ darstellen lässt.

Sonderfälle

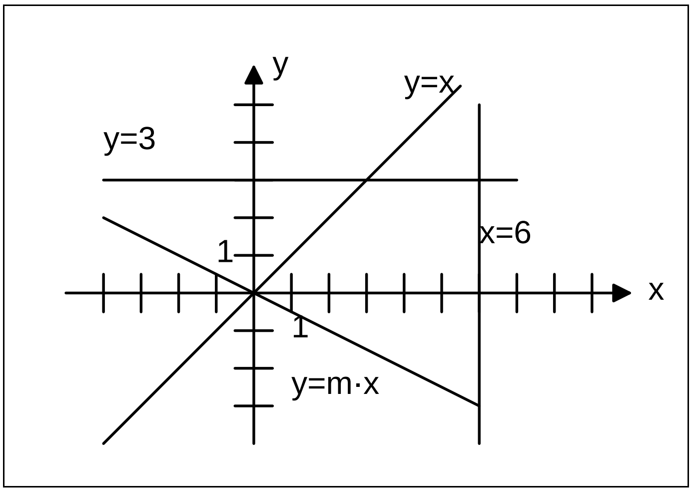
1. Fall: t = 0, d. h. f: $x \rightarrow m \cdot x$
In diesem Fall ist der y-Achsenabschnitt gleich Null, d. h. alle Graphen dieser Schar verlaufen durch den Koordinatenursprung.

2. Fall: $t = 0 \wedge m = 1$, d. h. f: $x \rightarrow x$
In diesem Fall ist die Gerade die Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten (Der Graph von g: $x \rightarrow -x$ ist die Winkelhalbierende des II. und IV. Quadranten).

3. Fall: $m = 0$, d. h. $f: x \rightarrow t$
In diesem Fall ist der Graph von f eine Parallele zur x-Achse und verläuft durch den Punkt P(x; t).

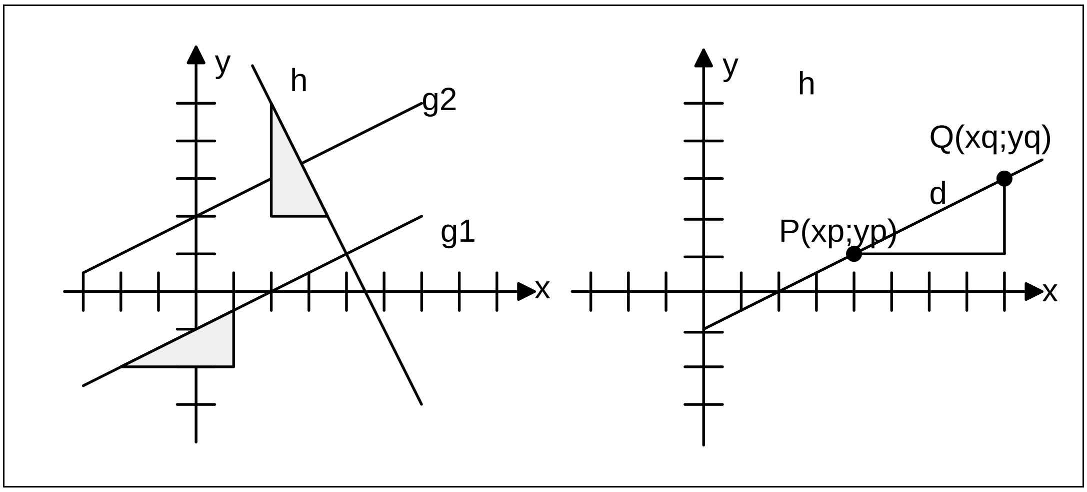
4. Fall: Parallele zur y-Achse
Dieser Fall kann mit dem bisherigen Instrumentarium nicht behandelt werden, da eine Parallele zur y-Achse kein Funktionsgraph ist (keine eindeutige Abbildung von x auf y!). Es gilt allerdings für jeden Punkt einer derartigen Parallelen $x = n$, so dass durch diese Gleichung eine Parallele zur y-Achse beschrieben wird.

Graphische Veranschaulichung:



Weitere Aussagen über Geraden

Beispiele:



Man erkennt sofort, dass $\Delta y_h = \Delta x_g$ und $\Delta x_h = -\Delta y_g$ ist. Dann gilt
$m_g = \frac{\Delta y_g}{\Delta x_g} = -\frac{\Delta x_h}{\Delta y_h} = -\frac{1}{m_h}$ bzw.
$m_g \cdot m_h = -1$.

Außerdem ist unmittelbar einsichtig, dass zwei Geraden genau dann parallel verlaufen, wenn ihre Steigungen gleich sind. Dies führt zu folgendem

Satz: Für zwei Geraden g_1: $x \rightarrow m_1 \cdot x + t_1$ und g_2: $x \rightarrow m_2 \cdot x + t_2$ gilt:

1. $g_1 || g_2$ genau dann, wenn $m_1 = m_2$;
2. $g_1 \perp g_2$ genau dann, wenn $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Das Steigungsdreieck ist ein rechtwinkliges Dreieck, in dem die pythagoreische Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ (a, b: Katheten; c: Hypotenuse) gilt. Sie kann zur Berechnung des Abstandes zwischen zwei Punkten P und Q verwendet werden (vgl. Skizze):
$d^2 = (x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 \Rightarrow d = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}$.

Die Betragsfunktion

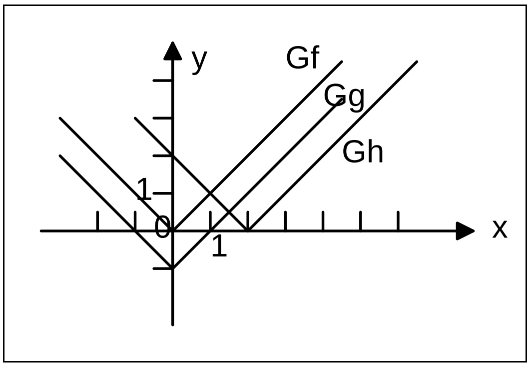
Wdh.: Der Absolutbetrag |a| einer reellen Zahl a ist so definiert:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

Beispiele: |3| = 3, |-5| = -(-5) = 5

Damit sind einfache Betragsfunktionen z. B. so erklärt:
f: $x \rightarrow |x|$; g: $x \rightarrow |x| - 1$; h: $x \rightarrow |x - 2|$

Die zugehörigen Graphen haben dann folgendes Aussehen:



Geradenscharen

Durch die Funktion f: $x \rightarrow m \cdot x + t$ wird nicht nur eine Funktion beschrieben, sondern eine Funktionenschar, aus der man eine einzige Funktion dadurch herausgreift, dass für die Formvariablen m und t konkrete Werte genommen werden. Ein einfaches Beispiel mag den Sachverhalt verdeutlichen:

Beispiel:
Wie groß muss die Steigung m gewählt werden, damit die Gerade mit der Gleichung $y = m \cdot x + 2$ den Punkt P(2; 5) enthält?
Lösung: Die ausgewählte Gerade enthält den Punkt P, wenn dessen Koordinaten die Geradengleichung erfüllen. Daraus lässt sich dann die gesuchte Größe m berechnen:

$5 = m \cdot 2 + 2$
$m \cdot 2 = 5 - 2 = 3$
$m = 1{,}5$

Anmerkungen:
1. Der Parameter m bestimmt die Steigung der Geraden.
2. Der Parameter t bestimmt den y-Achsenabschnitt.

Umkehrfunktionen

Wdh.: Eine Funktion ist eine Abbildung, bei der jedem x aus der Definitionsmenge eindeutig genau ein y aus der Zielmenge zugeordnet wird.

Es lässt sich aber auch bei bestimmten Funktionen f jedem y aus der Wertemenge eindeutig ein x aus der Definitionsmenge zuordnen. Die Menge der so entstehenden Paare (x; y) bildet dann eine Funktion f^{-1}:x = f(y), deren Graph mit dem Graphen von f übereinstimmt. Wenn man in den Paaren einer Funktion lediglich die Reihenfolge der Koordinaten verändert, ohne inhaltliche Änderungen vorzunehmen, sind Funktion f und Umkehrrelation f^{-1} nicht zu unterscheiden.

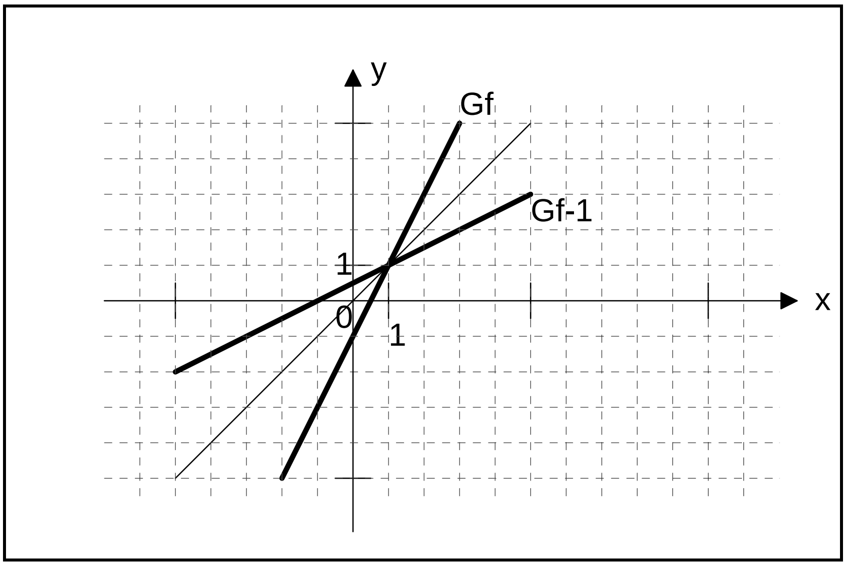
Es werden deshalb folgende Vereinbarungen getroffen:
1. x sei weiter die 1., y die zweite Koordinate.
2. D und W werden vertauscht, d. h. $D^{-1} = W$, $W^{-1} = D$.
3. Die Funktionsvorschrift wird inhaltlich umgekehrt.

Es bietet sich daher folgende Vorgangsweise beim Bilden der Umkehrfunktion an:
1. Auflösung der Funktionsgleichung nach x
2. Vertauschen der Variablen
3. Anpassen von Definitions- und Wertemenge

1. Beispiel:
f: $y = 2 \cdot x - 1$; D = r; W = R
$2 \cdot x = y + 1$
$x = \frac{1}{2} \cdot y + \frac{1}{2}$
$f^{-1} : y = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2}$

Offenbar sind die beiden Graphen symmetrisch bzgl. der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten.

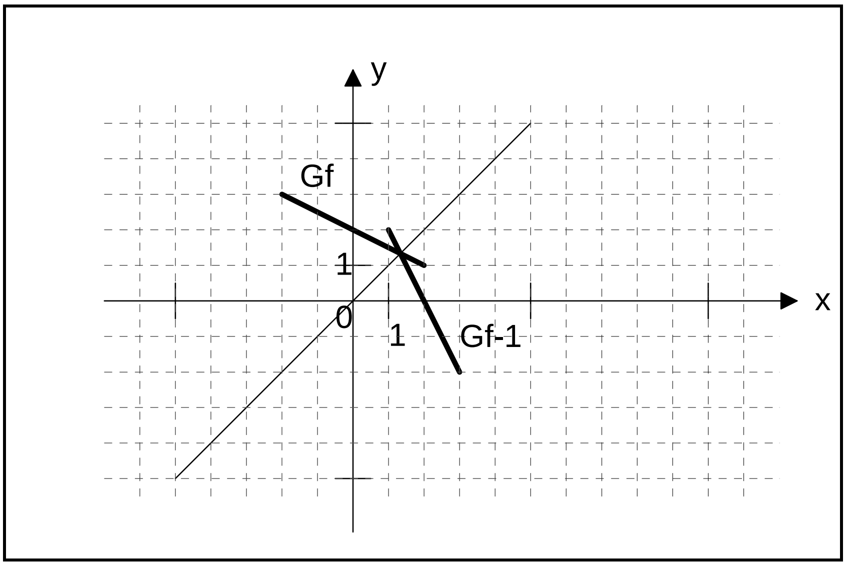
Graphen:



Der Zusammenhang zwischen den Definitions- und Wertemengen wird erst erkennbar, wenn die Definitionsmenge eingeschränkt wird:

2. Beispiel:
$f: y = -\frac{1}{2} \cdot x + 2;$ D=[-2; +2]; W = [1; 3]
$\frac{1}{2} \cdot x = -y + 2$
$x = -2 \cdot y + 4$
f^{-1}: $y = -2 \cdot x + 4$; D^{-1} = W = [1; 3]; W^{-1} = D=[-2; +2]

Graphen:



Zusammenfassung:

1. Man erhält die Gleichung der Umkehrfunktion f^{-1}, indem man die Funktionsgleichung von f nach x auflöst und zum Schluß die Variablen vertauscht.
2. Man erhält den Graphen von f^{-1} durch Spiegelung des Graphen von f an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten.