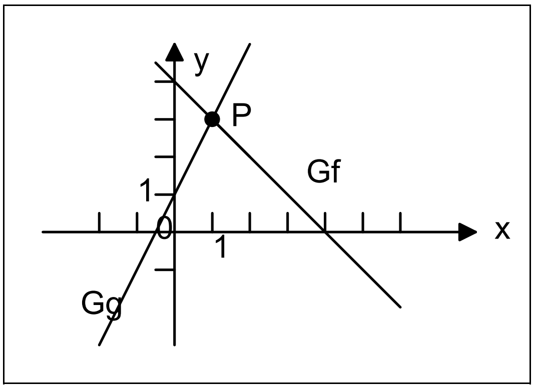
A2.3 Lineare Gleichungssysteme

Schnittpunkte von Graphen

Bereits weiter oben wurden die Schnittpunkte von Funktionsgraphen mit den Koordinatenachsen besprochen. Wenn sich zwei Geraden schneiden, dann müssen die Koordinaten der Schnittpunkte beide Funktionsgleichungen erfüllen, d. h. es ist ein lineares Gleichungssystem aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten zu lösen.

Beispiel: f: $y = -x + 4$, g: $y = 2 \cdot x + 1$



Man erkennt sofort, dass die beiden Graphen nur einen Schnittpunkt haben, d. h. nur einen Punkt, dessen Koordinaten beide Gleichungen gleichzeitig erfüllen.

Definition: Ein System von zwei Gleichungen
I $\quad a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = 0$
II $\quad a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = 0$
mit reellen Koeffizienten heißt lineares Gleichungssystem aus zwei Gleichungen in den Variablen x und y.

Das obige Beispiel lässt sich entsprechend umschreiben:
I $\quad -1 \cdot x + (-1) \cdot y + 4 = 0$
II $\quad +2 \cdot x + (-1) \cdot y + 1 = 0$

Anmerkungen:
1. Die Koeffizienten von x und y dürfen nicht beide gleichzeitig Null werden, da sonst z. B. $c_1 = 0$ folgen würde.
2. Unter obiger Einschränkung sind die zu den einzelnen Gleichungen gehörenden Graphen Geraden.
3. Jede der beiden Gleichungen hat unendlich viele Lösungen, es gibt aber nur jeweils eine Zahl für x und eine für y, die beide Gleichungen gleichzeitig erfüllen.

Definition: Unter der Lösung eine linearen Gleichungssystems mit zwei Variablen versteht man ein Zahlenpaar (x; y), das beide Gleichungen gleichzeitig erfüllt.

Lösungsverfahren

Zur Berechnung der Lösungen eines Gleichungssystems gibt es verschiedene Lösungsstrategien (graphisches Verfahren, Einsetzungsverfahren, Additionsverfahren, Gleichsetzungsverfahren, numerische Verfahren). Diese sollen jetzt an folgendem Beispiel besprochen werden:

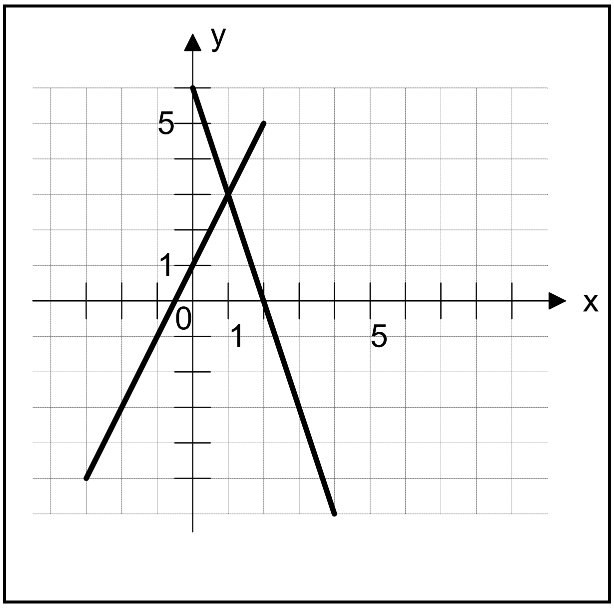
I $\quad 2 \cdot x - y + 1 = 0$
II $\quad -3 \cdot x - y + 6 = 0$

1. Das graphische Lösungsverfahren

Bereits im ersten Abschnitt wurde auf den Zusammenhang zwischen sich schneidenden Geraden und linearen Gleichungssystemen hingewiesen.

Das Prinzip des graphischen Lösungsverfahrens beruht darin, die einzelnen Gleichungen so umzuformen, dass ihre zugehörigen Geraden in ein Koordinatensystem eingezeichnet werden können. Der Schnittpunkt S(x; y) gibt dann die Lösungen des Systems an.

I $\quad y = 2 \cdot x + 1$
II $\quad y = -3 \cdot x + 6$



Man erkennt sofort, dass der Punkt P(1; 3) Schnittpunkt beider Geraden ist, dass also x = 1 und y = 3 die beiden Lösungen des Gleichungssystems sind.

I $\quad 2 \cdot 1 - 3 + 1 = 0$
II $\quad -3 \cdot 1 - 3 + 6 = 0$

2. Das Gleichsetzungsverfahren

Wenn das Gleichungssystem in der Form expliziter Funktionsgleichungen vorliegt, dann bietet sich das Gleichsetzungsverfahren an:

I $\quad y = 2 \cdot x + 1$
II $\quad y = -3 \cdot x + 6$

Die linken Seiten der beiden Gleichungen stimmen überein, also müssen dies auch die rechten Seiten tun:

$2 \cdot x + 1 = - 3 \cdot x + 6$
$5 \cdot x = 5$
$x = 1$

Der Schnittpunkt hat also die x-Koordinate x = 1; die zugehörige y-Koordinate erhält man, indem man x = 1 in eine (beliebige!) der beiden Gleichungen einsetzt:

(in I): $y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$
(in II): $y = - 3 \cdot 1 + 6 = 3$

Das Gleichungssystem hat also die Lösungsmenge L = (1; 3). Alternative Formulierung: Die beiden Gleichungen haben den Schnittpunkt S(1; 3).

Anmerkungen:
1. Zur Bestimmung der x-Koordinate des Schnittpunkts sind also lediglich die Funktionsterme gleichzusetzen, falls die Funktionsgleichungen in der expliziten Form y = f(x) vorliegen.
2. Zwei Geraden in einer Ebene können auch unendlich viele gemeinsame Punkte (zusammenfallende Geraden) haben.
   Beispiel: f: $y = -x + 4$, g: $2 \cdot x + 2 \cdot y = 8$.
3. Zwei Geraden in einer Ebene können auch keine gemeinsamen Punkte (parallele Geraden) haben.
   Beispiel: f: $x \rightarrow -x + 4$, g: $x \rightarrow -x + 1$.

3. Das Einsetzungsverfahren

Dieses Verfahren bietet sich an, wenn eine Gleichung des gegebenen Gleichungssystems bereits nach einer Variablen aufgelöst ist oder leicht nach einer Variablen aufgelöst werden kann. In diesem Fall entsteht beim Einsetzen in die andere Gleichung eine Gleichung mit nur einer Variablen.

Beispiel:

I $\quad 2 \cdot x - y + 1 = 0$
II $\quad -3 \cdot x - y + 6 = 0$

I $\quad y = 2 \cdot x + 1$
in II $\quad -3 \cdot x - 2 \cdot x - 1 + 6 = 0$
$-5 \cdot x + 5 = 0$
$5 \cdot x = 5$

$x = 1$
in I $\quad y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

4. Das Additionsverfahren

Das Additionsverfahren bietet sich an, wenn (eventuell nach Multiplikation einer Gleichung mit einem geeigneten Faktor) beim Addieren bzw. Subtrahieren beider Gleichungen eine Variable wegfällt.

Beispiel:

I $\quad 2 \cdot x - y + 1 = 0$
II $\quad -3 \cdot x - y + 6 = 0$

I - II $\quad 2 \cdot x - (-3 \cdot x) - y - (-y) + 1 - 6 = 0$
$5 \cdot x - 5 = 0$
$5 \cdot x = 5$
$x=1$

Auch die zweit Variable kann mit dem Additionsverfahren berechnet werden, wenn man z. B. die erste Gleichung mit 3 und die zweite Gleichung mit 2 multipliziert wird:

I $\quad 6 \cdot x - 3 \cdot y + 3 = 0$
II $\quad -6 \cdot x - 2 \cdot y + 12 = 0$
I + II $\quad -5 \cdot y + 15 = 0$
$y = 3$

Lösbarkeit linearer Gleichungssystem mit zwei Variablen

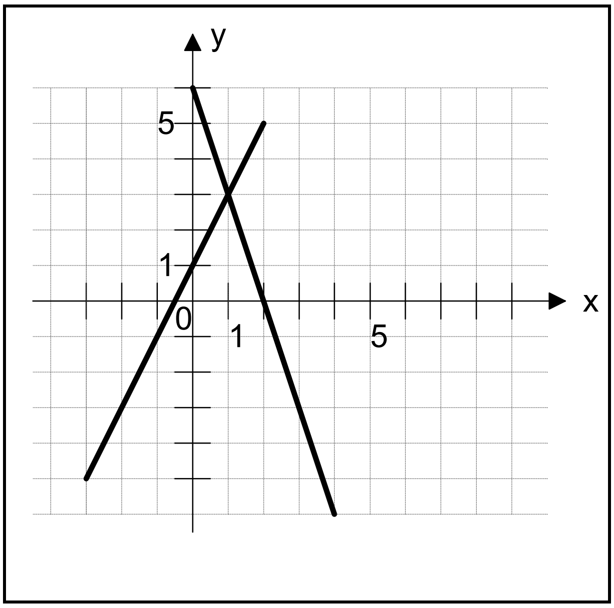
Wir haben das Lösen linearer Gleichungssystem mit zwei Variablen als Berechnen des Schnittpunktes von zwei Geraden gedeutet. Umgekehrt bilden zwei Geradengleichungen ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen. Die verschiedenen Lagen von zwei Geraden in der Zeichenebene geben deshalb über die Lösbarkeit des zugehörigen Gleichungssystems Aufschluss.

Wir können folgende Fälle unterscheiden:

1. Die beiden Geraden schneiden sich.

Beispiel:

I $\quad y = 2 \cdot x + 1$
II $\quad y = -3 \cdot x + 6$

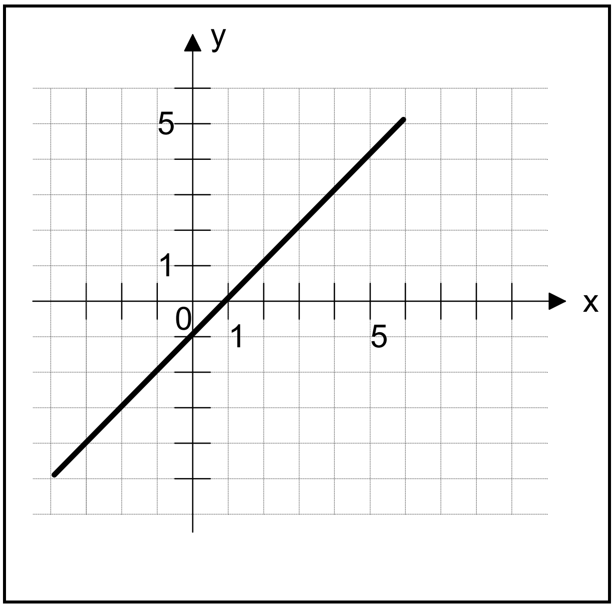


S (1; 3) bzw. x = 1, y = 3

2. Die beiden Geraden sind identisch. Dies ist genau dann der Fall, wenn die eine Gleichung ein Vielfaches der anderen ist.

Beispiel:

I $\quad x - y = 1 \Leftrightarrow y = x - 1$
II $\quad -2 \cdot x = 2 \cdot y + 2 \Leftrightarrow y = x - 1$

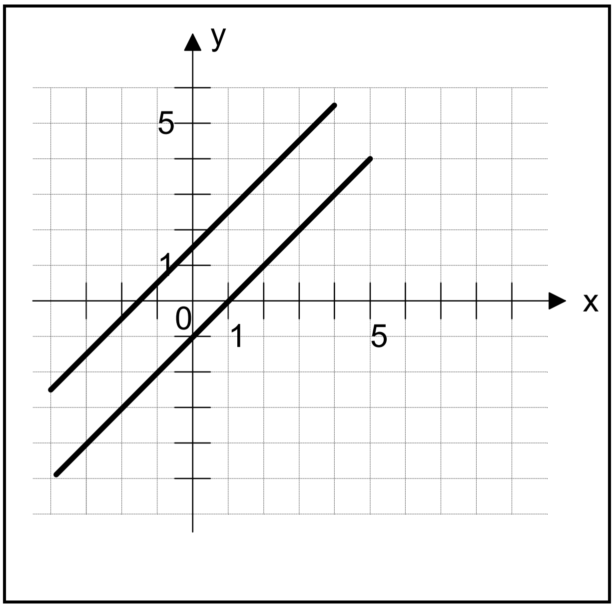


Alle Punkte der einen Gleichung erfüllen auch die andere Gleichung. Es gibt unendlich viele Lösungen.

3. Die beiden Geraden sind parallel und nicht identisch, haben also keinen Schnittpunkt.

Beispiel:

I $\quad x - y = 1 \Leftrightarrow y = x - 1$
II $\quad -2 \cdot x = 2 \cdot y - 3 \Leftrightarrow y = x + 1,5$



In diesem Fall hat das System keine Lösung:

I $\quad y = x - 1$
in II $\quad x - 1 = x + 1,5$
$x = x + 2,5$

Zusammenfassung: Ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen hat genau eine Lösung (ein Lösungspaar (x; y)) oder keine Lösung oder unendlich viele Lösungen.

Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen

Bei Gleichungssystemen aus drei Gleichungen mit drei Variablen ist eine so einfache Veranschaulichung wie bei den bisher behandelten Systemen nicht möglich. Exemplarisch soll bei derartigen Systemen die Lösungsidee behandelt werden.

Beispiel:

Felix stellt seiner Schwester Julia folgendes Rätsel:

Gesucht ist eine 3-stellige Zahl, deren Quersumme 13 ist. Die Hunderterziffer x ist um 7 kleiner als die Zehnerziffer y und die Zehnerziffer y ist doppelt so groß wie die Einerziffer z.

Zugehöriges Gleichungssystem:

I $x+y+z=13$
II $x=y-7$
III $y=2\cdot z$

Als grundsätzliche Strategie verfolgen wir die sukzessive Elimination der Variablen, bis nur mehr eine Gleichung mit einer Variablen vorliegt. Deren Lösung liefert dann den Wert dieser Variablen.

III in I $x+2\cdot z+z=13$
III in II $x=2\cdot z-7$

Es ist so ein Gleichungssystem aus zwei Gleichungen mit zwei Variablen entstanden.

I* $x+3\cdot z=13$
II* $x-2\cdot z=-7$

Dieses System kann leicht mit dem Additionsverfahren gelöst werden:

I* - II* $5\cdot z=20\Rightarrow z=4$

Es folgt unmittelbar

$y=2\cdot 4=8$ und $x=1$

Die gesuchte Zahl heißt also 184.

Anmerkung:
(Ohne Beweis) Nicht jedes Gleichungssystem aus drei Gleichungen mit drei Variablen ist lösbar!

> Zusammenfassung: Das Lösen eines Gleichungssystems mit mehr als zwei Variablen geschieht analog dem Lösen eines Gleichungssystems mit zwei Variablen, indem man die Anzahl der Gleichungen und Variablen schrittweise reduziert.

Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Das Gaußsche Eliminationsverfahren oder einfach Gauß-Verfahren (nach Carl Friedrich Gauß, einem der bedeutendsten deutschen Mathematiker, 1777 - 1855) ist ein Algorithmus aus den mathematischen Teilgebieten der linearen Algebra und der Numerik. Es ist ein wichtiges Verfahren zum Lösen von linearen

Gleichungssystemen und beruht darauf, dass elementare Umformungen zwar das Gleichungssystem ändern, aber die Lösung erhalten. Dies erlaubt es, jedes eindeutig lösbare Gleichungssystem auf Stufenform zu bringen, an der die Lösung durch sukzessive Elimination der Unbekannten leicht ermittelt oder die Lösungsmenge abgelesen werden kann.

Ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten hat die Form

$$\begin{aligned} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 \cdot z &= d_1 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 \cdot z &= d_2 \\ a_3 \cdot x + b_3 \cdot y + c_3 \cdot z &= d_3 \end{aligned}$$

Der Algorithmus zur Berechnung der Variablen x_1, x_2 und x_3 lässt sich in zwei Etappen einteilen:

1. Vorwärtselimination
2. Rückwärtseinsetzen (Rücksubstitution).

Im ersten Schritt wird das Gleichungssystem auf Stufenform gebracht. Stufenform heißt, dass pro Zeile mindestens eine Variable weniger auftritt, also mindestens eine Variable eliminiert wird. Im obigen Gleichungssystem würde man a_2, a_3 und b_3 eliminieren, in der dritten Zeile ist dann nur noch die Variable z:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 \cdot z &= d_1 \\ b_2 \cdot y + c_2 \cdot z &= d_2 \\ c_3 \cdot z &= d_3 \end{aligned}$$

Zum Erreichen der Stufenform werden elementare Zeilenumformungen benutzt, mit Hilfe derer das Gleichungssystem in ein neues transformiert wird, das aber dieselbe Lösungsmenge besitzt. Ausreichend sind zwei Arten von elementaren Zeilenumformungen:

1. Eine Zeile oder das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren.
2. Zwei Zeilen vertauschen.

Das Verfahren besteht dann darin, angefangen in der ersten Spalte mit Umformungen der ersten Art durch geschicktes Dazuaddieren der ersten Zeile alle Einträge bis auf den ersten zu Null z u machen. Dies wird dann in der so modifizierten zweiten Spalte fortgesetzt, wobei diesmal Vielfache der zweiten Zeile zu den folgenden Zeilen addiert werden und so weiter. Dieser Schritt funktioniert nur, wenn das Diagonalelement der aktuellen Spalte nicht Null ist. In so einem Fall ist die zweite Art der Zeilenumformung nötig, da durch eine Zeilenvertauschung ein Nichtnulleintrag auf der Diagonale erzeugt werden kann. Mit Hilfe dieser beiden Arten von Umformungen ist es möglich, jedes lineare Gleichungssystem auf Stufenform zu bringen.

Im zweiten Schritt des Verfahrens, dem Rückwärtseinsetzen, werden ausgehend von der letzten Zeile, in der nur noch eine Variable auftaucht, die Variablen ausgerechnet und in die darüber liegende Zeile eingesetzt.

Nach diesen eher grundsätzlichen Überlegungen soll ein einfaches Beispiel den Algorithmus verdeutlichen:

$$\begin{matrix} x+2y+3z=2 \\ x+y+z=2 \\ 3x+3y+1z=0 \end{matrix}$$, d. h. $a_2 = 1$, $b_2 = 2$, $c_2 = 3$, $d_2 = 2$ usw.

Zur besseren Übersichtlichkeit werden die Koeffizienten des linearen Gleichungssystems in die mit den jeweiligen d_i erweiterte Koeffizientenmatrix geschrieben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 2 \\ 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 3 & 3 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Jetzt wird so umgeformt, dass a_2 und a_3 Null werden, indem man geeignete Vielfache der ersten Gleichung zur zweiten und dritten Gleichung addiert.
Zur zweiten Gleichung wird also das (-1)-fache und zur dritten Zeile das (-3)-fache der ersten Zeile addiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 2 \\ 0 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & -3 & -8 & | & -6 \end{pmatrix}$$

Damit b_3 Null wird, wird ein Vielfaches der zweiten Zeile zur dritten Zeile addiert, in diesem Fall das (-3)-fache:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 2 \\ 0 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & -6 \end{pmatrix}$$

Die letzte Zeile in der Matrix bedeutet aber, auf die ursprünglichen Gleichungen angewandt,

$$-2 \cdot z = -6 \Leftrightarrow z = 3.$$

Damit ergibt sich für die zweite Zeile

$$-y - 2 \cdot z = 0 \Leftrightarrow -y - 2 \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow y = -6$$

und schließlich für die erste Zeile

$$x + 2 \cdot y + 3 \cdot z = 2 \Leftrightarrow x = 2 - 2 \cdot (-6) - 3 \cdot 3 = 5$$

Die Lösungen sind also x = 5, y = -6 und z = 3.

Anmerkungen, Hinweise:

Die Vorgehensweise kann in einzelne kleine Schritte zerlegt werden.

1. Brüche vermeiden durch zeilenweise Multiplikation mit dem Hauptnenner.

2. Die erste Zahl in der ersten Zeile soll positiv sein (evtl. mit -1 multiplizieren).

3. Sorgen Sie durch Multiplikation oder Division dafür, dass in der ersten Spalte alle Zahlen den gleichen Betrag haben. In Zeile 2 und 3 soll die erste Zahl negativ sein.

4. Addieren Sie zur 2. und zur 3. Zeile jeweils die erste. Dadurch entstehen in der ersten Spalte 2 Nullen.

5. Die zweite Zahl in der 2. Zeile soll positiv sein (ev. mit -1 multiplizieren).

6. Sorgen Sie durch Multiplikation oder Division dafür, dass ab der 2. Zeile in der zweiten Spalte alle Zahlen den gleichen Betrag haben. In Zeile 3 soll die zweite Zahl negativ sein.

7. Addieren Sie zur 3. Zeile die 2. Zeile. Dadurch entsteht in der 3. Zeile die 2. Null.

8. Ermittlung der Lösung durch Rückwärtseinsetzen.

Die gleiche Vorgehensweise kann auch auf Systeme mit mehr als drei Gleichungen übertragen werden.