A3 Quadratische Gleichungen und Funktionen

A3.1 Quadratische Gleichungen

Def.: Eine Gleichung des Typs $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ ($a, b, c \in R \wedge a <> 0$) heißt quadratische Gleichung.

Reinquadratische Gleichungen

Def.: Eine Gleichung $a \cdot x^2 + c = 0$ bzw. $x^2 = d$ ($a, c, d \in R \wedge a <> 0$) heißt rein quadratische Gleichung.

Beispiele:
1. $3 \cdot x^2 = -36$ $\quad <=> x^2 = -12$
2. $x^2 = 0$ $\quad <=> x^2 = 0$
3. $3 \cdot x^2 = 36$ $\quad <=> x^2 = 12$

Lösungen:
1. $x^2 < 0 \Rightarrow L = \{\quad\}$
2. $x^2 = 0 => x = 0$ (trivial)
3. $x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 - 12 = 0$
   $x^2 - \sqrt{12}^{\,2} = 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt{12}) \cdot (x - \sqrt{12}) = 0$
   $x + \sqrt{12} = 0 \vee x - \sqrt{12} = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{12} \vee x = +\sqrt{12} \Rightarrow L = \{-\sqrt{12}; \sqrt{12}\}$

Zusammenfassung: Die reinquadratische Gleichung $x^2 = d$ ($d \in R$) hat für
a) $d < 0$ keine reelle Lösung,
b) $d = 0$ die einzige Lösung $x = 0$,
c) $d > 0$ die Lösungsmenge $L = \{-\sqrt{d}; \sqrt{d}\}$.

Gemischtquadratische Gleichungen

Def.: Eine quadratische Gleichung mit nicht verschwindendem linearen Glied ($b \cdot x$) heißt gemischtquadratische Gleichung.

In einem Sonderfall lassen sich die Lösungen leicht bestimmen:
Beispiel:
$x^2 - 5 \cdot x = 0$
$x \cdot (x - 5) = 0$
$x = 0 \vee x - 5 = 0$

$x = 0 \vee x = 5$
$L = \{0; 5\}$

Im Allgemeinen lassen sich die Lösungen anders ermitteln. Ein geeignetes Verfahren kann so erarbeitet werden:

Beispiele:

1. $x^2 - 6 \cdot x + 9 = 16$
   $(x - 3)^2 = 4^2$
   $|x - 3| = 4$ bzw. $x - 3 = 4 \vee x - 3 = -4$
   $x = 4 + 3 \vee x = -4 + 3$
   $x = 7 \vee x = -1$
   $L = \{-7; +1\}$
2. $x^2 - 8 \cdot x - 20 = 0$
   $x^2 - 8 \cdot x = 20$
   $x^2 - 8 \cdot x + 4^2 = 20 + 4^2$ (quadratische Ergänzung)
   $(x - 4)^2 = 36$
   $x - 4 = 6 \vee x - 4 = -6$
   $x = 10 \vee x = -2$
   $L = \{-2; +10\}$

Die Methode der quadratischen Ergänzung lässt sich leicht auf den allgemeinen Fall der quadratischen Gleichung übertragen:

$x^2 + p \cdot x + q = 0$
$x^2 + p \cdot x + (\frac{p}{2})^2 = -q + (\frac{p}{2})^2$ (quadratische Ergänzung)
$(x + \frac{p}{2})^2 = (\frac{p}{2})^2 - q$ (Zusammenfassung)
$x + \frac{p}{2} = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} \vee x + \frac{p}{2} = -\sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ (Fallunterscheidung!)
$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ (Kurzfassung)
$L = \left\{x = -\frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q};\ x = -\frac{p}{2} - \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}\right\}$

Zusammenfassung: Die quadratische Gleichung in Normalform $x^2 + px + q = 0$ hat die Lösungsmenge $L = \left\{x = -\frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q};\ x = -\frac{p}{2} - \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}\right\}$.

Mit dieser Methode der quadratischen Ergänzung lässt sich auch für die quadratische Gleichung in allgemeiner Form eine Lösungsformel entwickeln:

$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$
$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ (Vorbereitung der quadr. Ergänzung)
$x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2$ (quadratische Ergänzung)
$(x + \frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{(2a)^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{-4ac+b^2}{4a^2}$
$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Zusammenfassung: Die quadratische Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ ($a \neq 0$) in allgemeiner Form hat die Lösungsmenge
$L = \left\{ \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}; \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \right\}$.

Die Diskriminante

An der Lösungsformel für quadratische Gleichungen kann man sofort erkennen, ob und gegebenenfalls wie viele Lösungen eine quadratische Gleichung hat.

Definition: Der Term $b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ heißt Diskriminante D der quadratischen Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$.

Die Diskriminante D lässt unmittelbar die Anzahl und das Aussehen der Lösungen erkennen. Es sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1. D < 0 => Die Gleichung hat keine reelle Lösung.
2. $D = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a}$
3. $D > 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Zusammenfassung: Die quadratische Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ ($a \neq 0$) in allgemeiner Form mit der Diskriminante $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ hat in R
a) genau zwei Lösungen, wenn D > 0 ist,
b) genau ein Lösung, wenn D = 0 ist,
c) keine Lösung, wenn D < 0 ist.

Quadratische Gleichungen mit Parametern

In der quadratischen Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ ($a \neq 0$) treten zwei Arten von variablen auf:

1. Die Variable x, nach der aufgelöst werden soll (Lösungsvariable).
2. Die Variablen a, b und c, durch die sich die verschiedensten quadratischen Gleichungen unterscheiden (Formvariable, Parameter).

Von den Parametern hängt die Zahl und die Form der Lösungen ab.

Beispiel:
Für welche Werte des Parameters t hat die Gleichung $x^2 + t \cdot x + 1 = 0$ zwei Lösungen? Wie heißen diese?
Lösung:
Die Zahl der Lösungen wird durch die Diskriminante D bestimmt.
$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = t^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = t^2 - 4$
Es gibt zwei Lösungen der quadratischen Gleichung, wenn D > 0 ist, d. h.
$t^2 > 4$ bzw. $t > 2 \vee t < -2$.

Die Lösungen heißen dann $x = \frac{-t \pm \sqrt{t^2-4}}{2}$.

Der Satz von Vieta

Die Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$ wird gelöst durch $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ (vgl. letzter Abschnitt). In diesem Kapitel soll geklärt werden, wie die Lösungen von den Koeffizienten p und q abhängen.

Beispiele:

Gleichung	p	q	x_1	x_2	$x_1 + x_2$	$x_1 \cdot x_2$
$x^2 - 9 \cdot x + 20 = 0$	-9	20	5	4	9	20
$x^2 + 9 \cdot x + 20 = 0$	9	20	-4	-5	-9	20
$x^2 - 7 = 0$	0	-7	$\sqrt{7}$	$-\sqrt{7}$	0	-7
$x^2 + x = 0$	1	0	0	-1	-1	0

Aus den angeführten Beispielen lässt sich leicht eine Vermutung aufstellen, die so formuliert werden kann:

> Satz von Vieta: Sind x_1 und x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung in Normalform $x^2 + p \cdot x + q = 0$, dann ist der konstante Summand q gleich dem Produkt, der Koeffizient des linearen Gliedes p entgegengesetzt gleich der Summe der beiden Lösungen, d. h. $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$.

Beweis:
Mit Hilfe der Lösungsformel folgt einerseits

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}\right) = -p,$$

andererseits gilt

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}\right) = (-\frac{p}{2})^2 - \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}^{\,2} =$$
$$= \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q.$$

Anwendungen

Mit Hilfe des Satzes von Vieta lassen sich in einfachen Fällen die Lösungen ohne Zuhilfenahme der Lösungsformel ermitteln bzw. aus den Lösungen die zugehörigen Gleichungen aufstellen.

1. Beispiel:
   Wie lauten die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - 12 \cdot x + 32 = 0$, d. h. $p = -12$, $q = 32$?
   Lösung: Die Summe der Lösungen muss 12 ergeben, das Produkt 32, und die beiden Lösungen haben dasselbe Vorzeichen ($q > 0$!)
   => $x_1 = 4$, $x_2 = 8$.

2. Beispiel:
   Welche quadratische Gleichung in Normalform hat die Lösungen $x_1 = 3$ und $x_2 = -1$?
   Lösung: $q = x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot (-1) = -3$, $-p = x_1 + x_2 = 3 + (-1) = 2 \Leftrightarrow p = -2$
   $\Rightarrow x^2 - 2 \cdot x - 3 = 0$.

Anmerkungen:
1. Aus den Lösungen lässt sich nicht eindeutig eine quadratische Gleichung angeben; jede Gleichung, die aus einer gefundenen Gleichung durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor entsteht, hat dieselben Lösungen.
2. Der Satz von Vieta wird insbesondere angewandt,
   - um die Probe bei einer quadratischen Gleichung zu machen,
   - um die Lösungen bei einfachen quadratischen Gleichungen unmittelbar zu sehen.

Linearfaktorzerlegung

Manche quadratischen Polynome lassen sich sehr leicht faktorisieren, d. h. in ein Produkt aus zwei sog. Linearfaktoren in x verwandeln.

Beispiele:
1. $x^2 - 36 = 0 \Rightarrow (x + 6) \cdot (x - 6) = 0$.
2. $x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 = 0$.

Das Faktorisieren gelingt also, wenn eine binomische Formel anwendbar ist. Ein quadratisches Polynom ist aber auch dann faktorisierbar, wenn die Lösungen der zugehörigen quadratischen Gleichung bekannt sind:

$x^2 + p \cdot x + q = x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 =$
$= x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2 =$
$= x \cdot (x - x_1) - x_2 \cdot (x - x_1) =$
$= (x - x_1) \cdot (x - x_2)$.

Zusammenfassung: Hat die Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$ die Lösungen x_1 und x_2, dann lässt sich $x^2 + p \cdot x + q$ als Produkt von Linearfaktoren schreiben:
$x^2 + p \cdot x + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$.

Beispiel:
$x^2 - 13 \cdot x + 42 = 0$
$x^2 - (6 + 7) \cdot x + 6 \cdot 7 = 0$
$x_1 = 6$, $x_2 = 7$ bzw.
$x^2 - 13 \cdot x + 42 = (x - 6) \cdot (x - 7)$.