A3.2 Quadratische Funktionen

Die Quadratfunktion

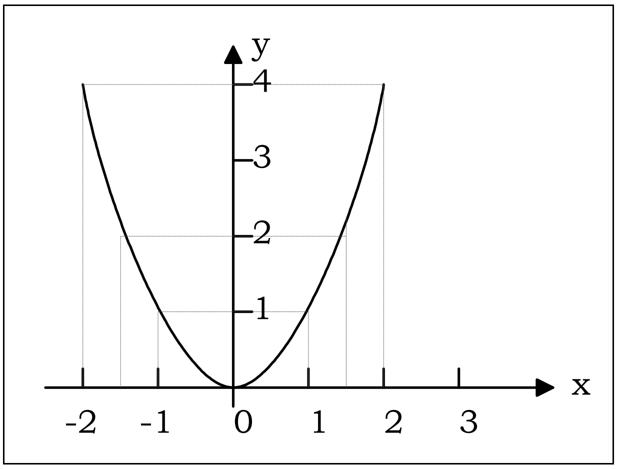
Definition: Eine reelle Funktion f: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, D = R (a, b, c $\in$ R $\wedge$ a $\neq$ 0) heißt quadratische Funktion.

Beispiele:
1. f: $y = 2 \cdot x^2$
2. f: $y = 0{,}5 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 2$

Die Quadratfunktion f: $y = x^2$

Definition: Die Funktion f: $y = x^2$ heißt Quadratfunktion.

Wählt man als Definitionsmenge D_f = R, dann ergibt sich für den Graphen folgende Kurve:



Eigenschaften der Quadratfunktion:
1. Die Funktionswerte sind als Quadrate reeller Zahlen alle nicht negativ.
2. Der kleinste Funktionswert ist 0; für $x \to \pm\infty$ steigen die Funktionswerte unbegrenzt an $\Rightarrow W_f = R_0^+ = [0; +\infty[$.
3. Wegen $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ für alle $x \in D_f$ ist der Graph von f, die sog. Normalparabel, symmetrisch zur y-Achse, die Parabelachse.
4. Der tiefste Punkt des Graphen heißt Scheitel S(0; 0).
5. In $I_1 = R^+$ ist der Graph von f streng monoton steigend, d. h. es gilt $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < f(x_1) < f(x_2)\ \forall\ x_1, x_2 \in I_1$.
   Entsprechend ist die Normalparabel in $I_2 = R^-$ streng monoton fallend.

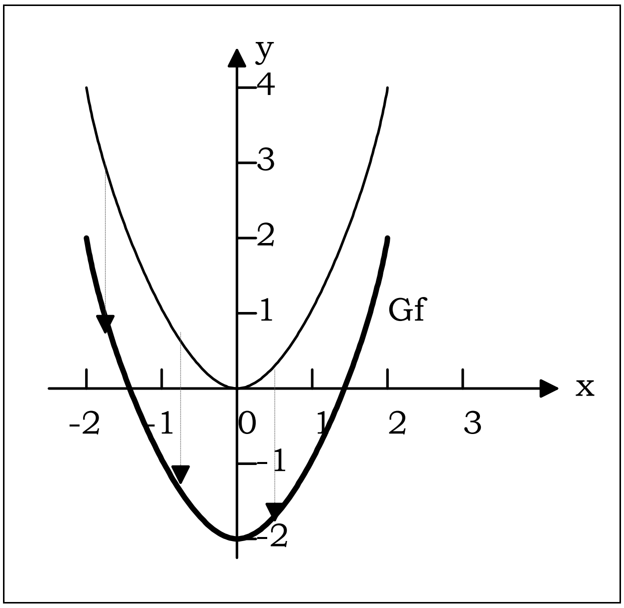
Die Funktion f: $y = x^2 + y_S$

Beispiel: f: $y = x^2 - 2$

Wertetabelle:

x	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3	4
x^2	9	4	1	0,25	0	0,25	1	4	9	16
$x^2 - 2$	7	2	-1	-1,75	-2	-1,75	-1	2	7	14

Graph:



Analoge Graphen ergeben sich, wenn y_S einen anderen Wert annimmt.

Zusammenfassung: Die Funktion f: $y = x^2 + y_S$, $y_S \in R$, hat für $D_f = R$ die Wertemenge $W = [y_S; \infty[$. Ihr Graph ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S(0; y_S)$.

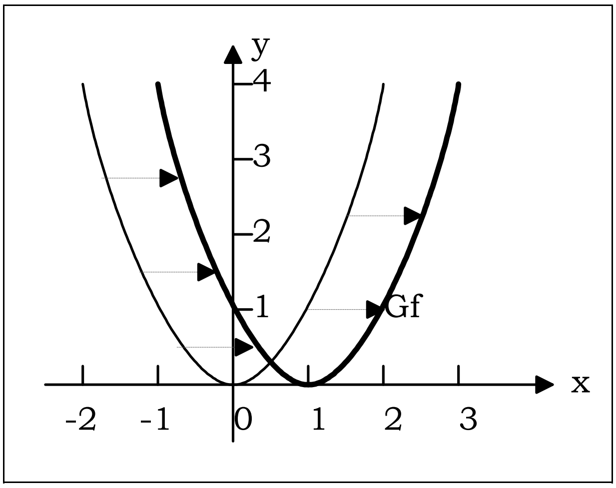
Die Funktion f: $y = (x - x_S)^2$

Beispiel: f: $y = (x - 1)^2$

Wertetabelle:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25
$(x-1)^2$	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Graph:



Zusammenfassung: Die Funktion f: $y = (x - 1)^2$, $x_S \in R$, hat für $D_f = R$ die Wertemenge $W = [0;\ \infty[$. Ihr Graph ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S(x_S; 0)$.

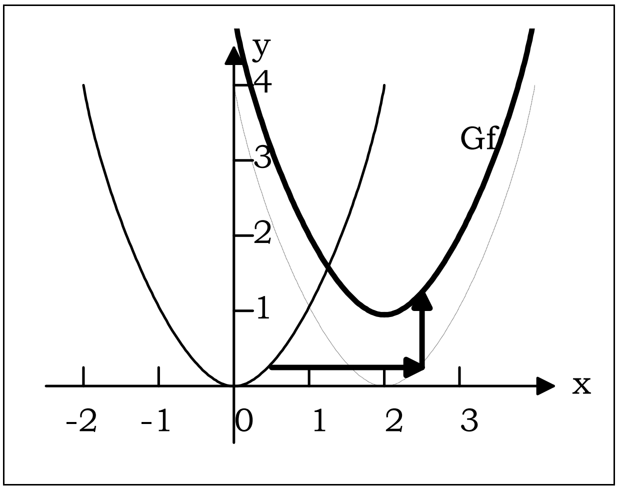
Die Funktion f: $y = (x - x_S)^2 + y_S$

Beispiel: f: $y = (x - 2)^2 + 1$

Wertetabelle:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25
$(x - 2)^2$	36	25	16	9	4	1	0	1	4	9
$(x - 2)^2 + 1$	37	26	17	10	5	2	1	2	5	10

Graphen:



Überlegung: Der Wert x_S im Funktionsterm bewirkt eine Verschiebung der Normalparabel um x_S nach rechts, der Summand y_S eine zusätzliche Verschiebung um y_S nach oben.

Nicht immer liegt allerdings die Funktionsgleichung in dieser einfachen Form vor; sie lässt sich aber durch quadratische Ergänzung leicht in die gewünschte Form umwandeln.

Beispiel: f: $y = x^2 + 4 \cdot x + 3$
$f(x) = x^2 + 4x + \mathbf{4} + 3 \mathbf{- 4} =$
$= (x + 2)^2 - 1$
Der zugehörige Graph ist eine um zwei Einheiten nach links (!) und eine Einheit nach unten (!) verschobene Normalparabel.

Jeder Punkt der Parabelachse hat die x-Koordinate x_S.

Zusammenfassung: Jede Funktion der Form f: $y = x^2 + b \cdot x + c$ lässt sich durch quadratische Ergänzung in die Scheitelform f: $y = (x - x_S)^2 + y_S$ bringen. Ihr Graph ist für $D_f = R$ eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitel $S(x_S; y_S)$. Ihre Wertemenge ist $W = [y_S; \infty[$. Die Parabelachse hat die Gleichung $x = x_S$.

Eine Musteraufgabe:
Gegeben ist die quadratische Funktion f: $y = x^2 + 5x + 6$, $D_f = R$.
Gib Wertemenge W, Scheitel S und Parabelachse an und berechne die Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen. Zeichne dann G_f.
Lösung:
$f(x) = x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2 \cdot 2,5x + 2,5^2 - 2,5^2 + 6 = (x + 2,5)^2 - 0,25.$
=> $W = [-0,25; \infty[$, $S(-2,5; -0,25)$, $x = -2,5$.
Schnittpunkt mit der y-Achse: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 6 \Rightarrow SP_y(0; 6)$
Schnittpunkt mit der x-Achse: $y = f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 6 = 0$
$(x + 2) \cdot (x + 3) = 0$
$x = -2 \wedge x = -3$.

Die Funktion f: $y = a \cdot x^2$

Beispiel: In Fahrschulheften findet man oft folgende Faustregel für den Bremsweg y (in m) in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v (in $\frac{km}{h}$): Dividiere die Tachoanzeige durch 10 und multipliziere das Ergebnis mit sich selbst. Als Abstand vom vorausfahrenden Auto wird "halber Tacho" empfohlen (z. B. 40 m Abstand bei v = 80 $\frac{km}{h}$).

Der Bremsweg y ist eine Funktion der Geschwindigkeit x, die so formuliert werden kann:
$y = f(x) = (\frac{x}{10})^2 = \frac{1}{100} \cdot x^2.$

Die Wertetabelle liefert

x in km/h	0	20	40	60	80	100	120	140
y in m	0	4	16	36	64	100	144	196

Abstand in m	0	10	20	30	40	50	60	70

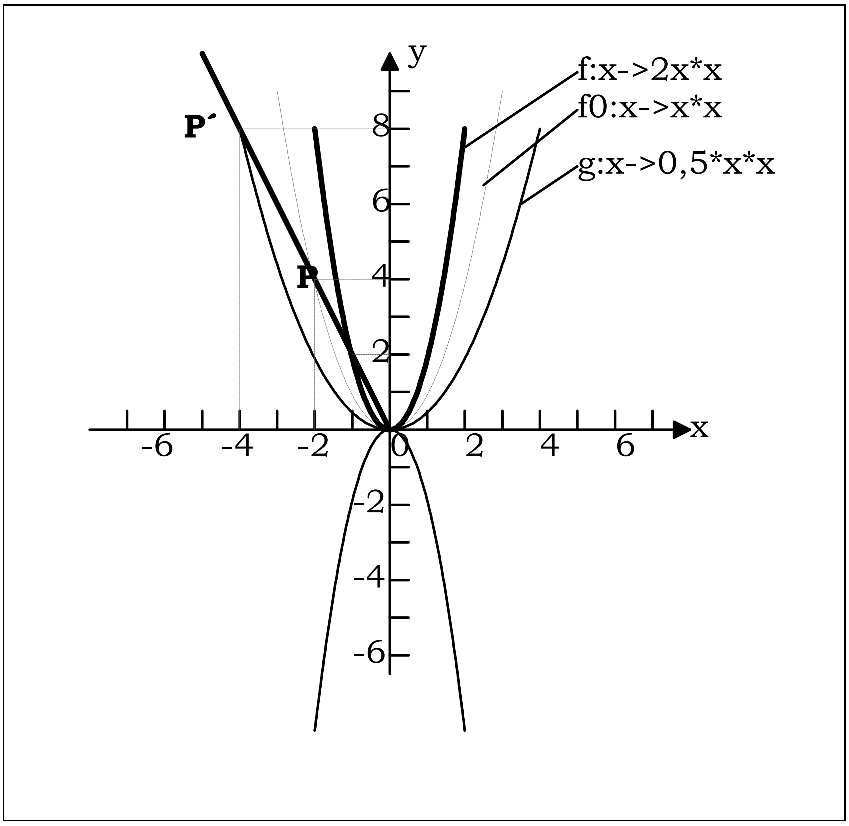
Der zugehörige Graph ist ein Stück einer Parabel, aber keine Normalparabel.

Weitere Beispiele:
f: $y = a \cdot x^2$, $D_f = R$, $a \in \{0{,}5; 2; -0{,}5; -2\}$

Wertetabelle:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x^2	4	1	0	1	4	9	16	25
$2 \cdot x^2$	8	2	0	2	8	18	32	50
$0{,}5 \cdot x^2$	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5
$-2 \cdot x^2$	-8	-2	0	-2	-8	-18	-32	-50
$-0{,}5 \cdot x^2$	-2	-0,5	0	-0,5	-2	-4,5	-8	-12,5

Graphen:



Man erkennt: Der Graph von $g: y = \frac{1}{2} \cdot x^2$ geht aus dem Graphen von f_0: $y = x^2$ durch zentrische Streckung mit dem Zentrum Z(0; 0) und dem Streckfaktor m = 2 hervor.

Rechnerischer Nachweis, Verallgemeinerung:
$f: y = \frac{1}{a} \cdot x^2$; $f*: y = x^2$
$f(a \cdot x) = \frac{1}{a} \cdot (a \cdot x)^2 = a \cdot x^2 = a \cdot f*(x)$ für alle $x \in R$,
d. h. jeder Punkt $P(x; x^2) \in G_{f*}$ hat einen Bildpunkt $P´(ax; a \cdot x^2) \in G_f$, der Streckfaktor ist mithin m = a.

Zusammenfassung: Der Graph der Funktion f: $y = a \cdot x^2$ ($a \neq 0$), $D_f = R$, heißt Parabel. Sie hat den Scheitel S(0; 0) und ist symmetrisch zur y-Achse. Für $a > 0$ ist die Parabel nach oben, für $a < 0$ nach unten geöffnet. Der Graph geht aus der Normalparabel durch zentrische Streckung mit dem Streckzentrum Z(0; 0) und dem Streckfaktor $m = \frac{1}{a}$ hervor. Alle Parabeln sind ähnlich.

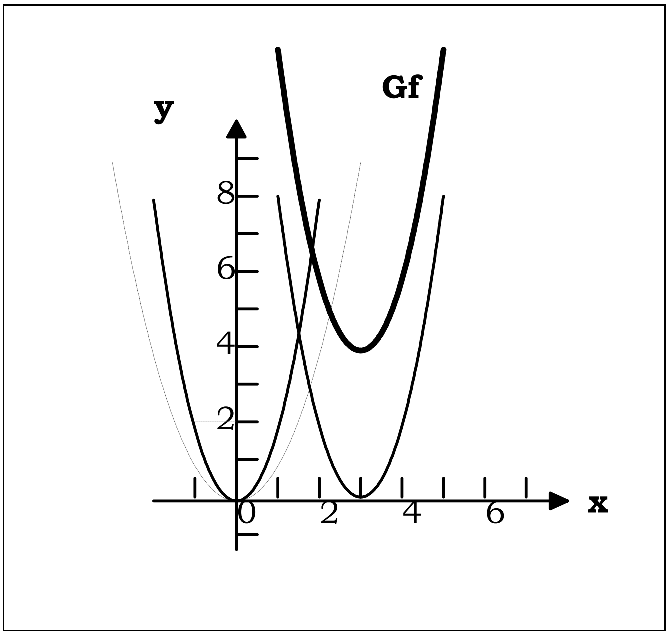
Die allgemeine quadratische Funktion f: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Der Scheitel einer allgemeinen quadratischen Funktion kann durch quadratische Ergänzung bestimmt werden.

Beispiel: f: $y = 2 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 22$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2 \cdot x^2 - 12x + 22 = \\
&= 2 \cdot (x^2 - 6x) + 22 = \\
&= 2 \cdot (x^2 - 6x + 3^2 - 3^2) + 22 = \\
&= 2 \cdot (x^2 - 6x + 9) - 2 \cdot 9 + 22 = \\
&= 2 \cdot (x - 3)^2 + 4
\end{aligned}
$$

Auswertung: Der Graph hat den Scheitel S(3; 4); der Faktor 2 bewirkt gegenüber dem Graphen von f*: $y = x^2$ eine zentrische Streckung mit Zentrum Z(0; 0) und Streckfaktor $m = \frac{1}{2}$; daran schließt sich noch eine Verschiebung um 3 parallel zur x-Achse (nach rechts) und um 4 parallel zur y-Achse (nach oben) an.



Allgemeine Berechnung des Scheitels:

f: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a \cdot (x^2 + \tfrac{b}{a} \cdot x) + c = \\
&= a \cdot (x^2 + \tfrac{b}{a} \cdot x + (\tfrac{b}{2a})^2 - (\tfrac{b}{2a})^2) + c = \\
&= a \cdot (x^2 + \tfrac{b}{a} \cdot x + (\tfrac{b}{2a})^2) + c - a \cdot \tfrac{b^2}{4a^2} =
\end{aligned}
$$

$= a \cdot (x + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a}$.

Daraus liest man unmittelbar die Koordinaten des Scheitels S ab:
$S\left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right)$,
wobei der Scheitel je nach dem Vorzeichen von a der niedrigste oder der höchste Punkt des Graphen ist.

Zusammenfassung: Der Graph der Funktion f: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ($a \neq 0$) hat den Scheitel $S\left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right)$ und für D = R die Wertemenge $W = \left[c - \frac{b^2}{4a}; \pm\infty\right[$. Für $a > 0$ ist die Parabel nach oben, für $a < 0$ nach unten geöffnet.

Aufstellen von Funktionsgleichungen

Erinnerung: Durch zwei Punkte ist eindeutig eine Gerade bestimmt. In der Geradengleichung $y = m \cdot x + b$ können die Formvariablen m und b durch Einsetzen der Koordinaten der Punkte in die Gleichung bestimmt werden (Lösen eines Gleichungssystems aus zwei Gleichungen).

In analoger Weise lassen sich die Formvariablen a, b und c in der Funktionsgleichung $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ aus drei Punkten bestimmen, so dass durch drei Punkte (die nicht auf einer Geraden liegen) eindeutig eine Gerade bestimmt ist.

Beispiel:
Bestimme die allgemeine quadratische Gleichung, deren Graph durch die drei Punkte P(0; 3), Q(1; 0) und R(5; 8) gegeben ist.
Lösung:

I	$f(0) = 3$	$\Leftrightarrow c = 3$
II	$f(1) = 0$	$\Leftrightarrow a + b + c = 0$
III	$f(5) = 8$	$\Leftrightarrow 25 \cdot a + 5 \cdot b + c = 8$

I in II: II' $a + b = -3$
I in III: III' $25 \cdot a + 5 \cdot b = 5$
Mit einem der üblichen Verfahren (Gleichsetzungs-, Einsetzungs- oder Additionsverfahren) erhält man daraus schnell die Gleichung f: $y = x^2 - 4 \cdot x + 3$.

Weitere Beispiele:

P(1; 1), Q(2; 4), R(-3; 9)
S(2;1), P(3;0)

Schnitt von Parabeln

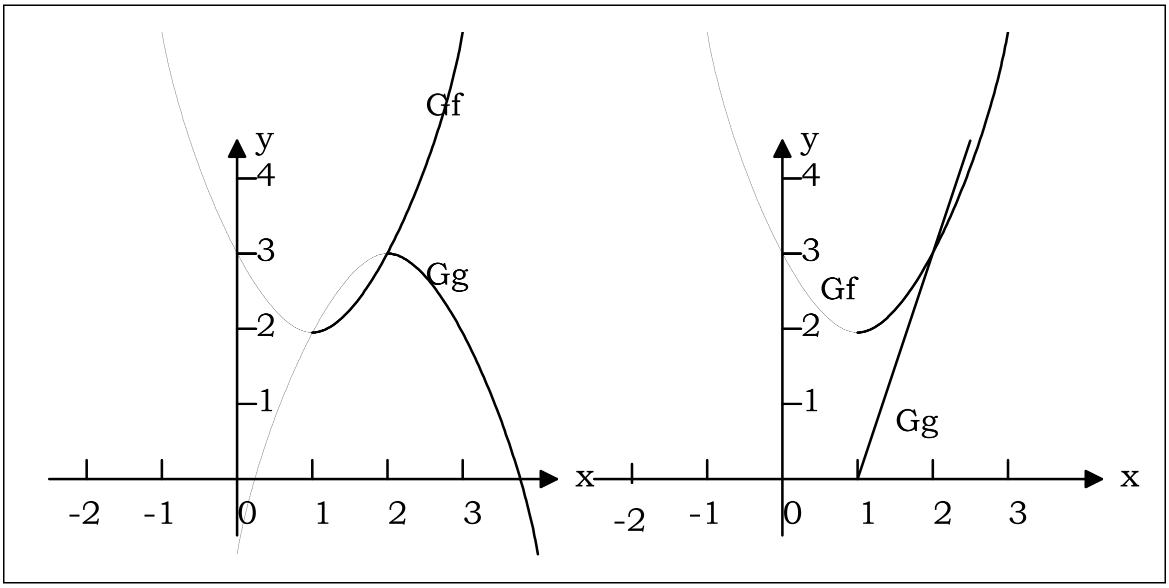
Analog zum Schnitt von Geraden erhält man die Schnittpunkte von beliebigen Funktionsgraphen, also auch von Parabeln, indem man die Funktionsterme aus der expliziten Darstellung der Funktion gleichsetzt und die Gleichung löst.

Beispiele:

1. Bestimme die Schnittpunkte der Graphen von
   $f: y = x^2 - 2x + 3$ und $g: y = -x^2 + 4x - 1$.
   Lösung: $x = 2 \vee x = 1$.

2. Bestimme die Schnittpunkte der Graphen von
   $f: y = x^2 - 2x + 3$ und $g: y = 3x - 3$.
   Lösung: $x = 2 \vee x = 3$.

Skizzen:



Musteraufgabe:

Geben ist die Parabel p_1 mit der Gleichung $y = x^2 - 2x - 3$.

Bestimme die Schnittpunkte der Parabel mit

a) der Geraden mit den Koordinatenachsen

b) mit der Geraden mit der Gleichung $y = x + 1$

c) mit der Parabel p_2 mit der Gleichung $y = -x^2 + 4$

d) mit der Geradenschar mit der Gleichung $y = -mx + m$