# A4 Potenzen und Potenzfunktionen

## A4 Potenzen und Potenzfunktionen

### Potenzen mit natürlichen Exponenten

Für Potenzen mit natürlichen Exponenten gilt folgende

Def.: Die Potenz $a^n$ mit $a \in R$, $n \in N \backslash \{1\}$, ist durch folgende Gleichung erklärt:
$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a$.
(n Faktoren)
Für n = 1 gilt: $a^1 = a$.
a heißt Grundzahl oder Basis, n heißt Hochzahl oder Exponent.

Beispiele:
1. $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
2. $a^2 = a \cdot a$
3. $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$
4. $-2^2 = - 2 \cdot 2 = -4$

Aus der Definition der Potenz ergeben sich leicht die nachfolgenden Rechenregeln.

### Multiplikation und Division von Potenzen mit gleichen Basen

Beispiele:
1. $a^3 \cdot a^2 = \underbrace{(a \cdot a \cdot a)}_{\text{3 Faktoren}} \cdot \underbrace{(a \cdot a)}_{\text{2 Faktoren}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{\text{5 Faktoren}} = a^5$
2. allg.: $a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot ... \cdot a)}_{\text{m Faktoren}} \cdot \underbrace{(a \cdot ... \cdot a)}_{\text{n Faktoren}} = \underbrace{a^{m+n}}_{\text{(m+n) Faktoren}}$

Zusammenfassung: Für alle $a \in R$, $m, n \in N$ gilt: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Bei der Division von Potenzen ist zu beachten, dass die Basis nicht Null werden darf, und zu unterscheiden, welcher Exponent größer ist:

Beispiele:
1. $\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a \cdot a = a^2 = a^{5-3}$
2. $\frac{a^3}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = 1$
3. $\frac{a^2}{a^6} = \frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^4} = \frac{1}{a^{6-2}}$

Es ist leicht einzusehen, dass die beschriebenen Beispiele verallgemeinert werden können, so dass sich der nachfolgende Satz als Zusammenfassung ergibt:

Zusammenfassung: Für alle $a \in R\setminus\{0\}$; $m, n \in N$, gilt:

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{für } m > n \\ 1 & \text{für } m = n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{für } m < n \end{cases}.$$

**Multiplikation und Division von Potenzen mit gleichen Exponenten**

Beispiele:

1. $2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36 = 6^2 = (2 \cdot 3)^2$
2. allg: $a^n \cdot b^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot ... \cdot a)}_{n\ Faktoren} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot ... \cdot b)}_{n\ Faktoren} =$
   $= \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot ... \cdot (a \cdot b)}_{n\ \text{Faktoren}} = (a \cdot b)^n$
3. aber: $(a \cdot b)^n \neq a \cdot b^n$

Zusammenfassung: Für alle a, b $\in$ R, n $\in$ N gilt: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$.

Völlig analog lässt sich der nächste Satz beweisen:

$$\frac{a^n}{b^n} = \underbrace{\frac{a \cdot a \cdot ... \cdot a}{b \cdot b \cdot ... \cdot b}}_{\text{je n Faktoren}} = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot\ ...\ \cdot \left(\frac{a}{b}\right)}_{\text{n Faktoren}} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Zu beachten ist allerdings, dass die Basis nicht Null werden darf!

Zusammenfassung: Für alle $a \in R$, $b \in R\setminus\{0\}$, $n \in N$, gilt: $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

**Potenzieren von Potenzen mit natürlichen Exponenten**

Beispiele:

1. $(x^3)^2 = x^3 \cdot x^3 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^6 = x^{3 \cdot 2}$
2. allg.: $(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot ... \cdot a^m}_{n\ \text{Faktoren}\ a^m} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{(m \cdot n)\ \text{Faktoren}\ a} = a^{m \cdot n}$

Zusammenfassung: Für alle a $\in$ R; m, n $\in$ N, gilt: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

**Der Exponent Null**

Die folgenden Erweiterungen des Potenzbegriffs verfolgen das Ziel, mit den bisher gewonnenen Rechenregeln auch mit Potenzen mit negativen ganzzahligen und rationalen Exponenten rechnen zu können.

Wdh.: Für $\frac{a^m}{a^n}$ mit m, n $\in$ N ist zur Berechnung eine Fallunterscheidung nötig, je nachdem welche der natürlichen Zahlen m und n größer ist. Für m = n entfällt diese Unterscheidung, wenn man formal setzt:

$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$.

Andererseits gilt $\frac{a^m}{a^m} = 1$ für beliebiges m und $a \in R\backslash\{0\}$.
Damit liegt folgende Definition nahe:

| |
|---|
| Def.: Für alle $a \in R\backslash\{0\}$ gilt $a^0 = 1$. |

Beispiele:
1. $2^0 = 1$
2. $(-8)^0 = 1$
3. $(a^2 + b^2)^0 = 1$, $(a^2 + b^2 <> 0)$.

Anmerkung:
a = 0 ist auszuschließen, da $a^0 = \frac{a^n}{a^n} = 1$ für a = 0 nicht erklärt ist!

**Negative ganzzahlige Exponenten**

Hinführung: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ soll nun auch für n < m gelten.

Beispiel:
$\frac{a^2}{a^5} = \frac{1}{a^3}$.
Eine formale Anwendung der obigen Beziehung liefert sofort
$\frac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3}$,
also $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$.

Eine Verallgemeinerung legt die folgende Definition nahe:

| |
|---|
| Def.: Für alle $a \in R\backslash\{0\}$, $m \in Z$ gilt: $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$. |

Beispiele:
1. $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$
2. $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$
3. $(-5)^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$
4. $-5^{-3} = \frac{1}{-5^3} = -\frac{1}{125}$.

Folgerung: Für alle $a \in R\backslash\{0\}$, $m, n \in Z$ gilt: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

Ohne Beweis: Für diese und alle folgenden Definitionen lässt sich zeigen, dass die ursprünglichen Regeln für das Rechnen mit Potenzen weiterhin gelten! Daraus folgt die nachfolgende

| | | | |
|---|---|---|---|
| Zusammenfassung: Im Einzelnen gilt für $a, b \in R\backslash\{0\}$, $p, q \in Z$: | | | |
| $a^0 = 1$ | $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ | $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ | $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ |
| $a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$ | $\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$ | $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$. | |

## Darstellung kleiner Zahlen mit Hilfe von Zehnerpotenzen

Die Zehnerpotenzen mit ganzzahligen Exponenten sind von größter Bedeutung für die Schreibweise großer und kleiner Zahlen in der sog. Gleitkommadarstellung, bei der nach der ersten von Null verschiedenen Ziffer das Komma gesetzt wird.

Beispiele:

1. $3500000 = 3{,}5 \cdot 10^6$
2. $350 = 3{,}5 \cdot 10^2$
3. $0{,}35 = 3{,}5 \cdot \frac{1}{10} = 3{,}5 \cdot 10^{-1}$
4. $0{,}0000035 = 3{,}5 \cdot \frac{1}{1000000} = 3{,}5 \cdot 10^{-6}$

Man erkennt: Eine Zahl mit der Gleitkommadarstellung $a \cdot 10^{-n}$ $(1 \leq a < 10;\ n \in N)$ hat in dezimaler Schreibweise auf der n-ten Stelle nach dem Komma die erste von Null verschiedene Ziffer stehen.

Damit lassen sich z. B. wichtige physikalische Konstanten leicht angeben:

1. Atomradius: $r_A = 0{,}00000000015$ m $= 1{,}5 \cdot 10^{-10}$ m
2. Plancksches Wirkungsquantum: $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Js

## Die n-te Wurzel

Beispiel: Ein Häuslebauer möchte in seinem Garten einen würfelförmigen Regensammelbehälter mit dem Fassungsvermögen V = 2 $m^3$ eingraben. Welche (innere) Kantenlänge x muss ein solcher Würfel haben?
Lösung: Die Kantenlänge x ist die Lösung der Gleichung $x^3 = 2\ m^3$. Es ist leicht zu überprüfen, dass ungefähr x = 1,26 m gilt, da $(1{,}26\ m)^3 \approx 2\ m^3$ ergibt.

Analog zur Definition der Quadratwurzel aus a als nichtnegative Lösung der Gleichung $x^2 = a$ $(a \geq 0)$ wird definiert:

Definition: Unter der n-ten Wurzel aus einer nichtnegativen Zahl a versteht man diejenige nichtnegative Zahl x, deren n-te Potenz die Zahl a ergibt.
Schreibweise: $x = \sqrt[n]{a}\ (n \in N, a \in R_0^+)$.

Beispiele:

1. $\sqrt[3]{8} = 2$, weil $2^3 = 8$
2. $\sqrt[4]{81} = 3$, weil $3^4 = 81$
3. $\sqrt[3]{0{,}125} = 0{,}5$, weil $0{,}5^3 = {,}125$
4. $\sqrt[3]{-8}$ ist nicht erklärt, obwohl $(-2)^3 = 8$, da -2 eine negative Zahl ist.

Die Existenz und Eindeutigkeit der n-ten Wurzel verläuft analog zum Nachweis von Existenz und Eindeutigkeit der Quadratwurzel. Daraus folgt die folgende

Zusammenfassung: Jede nicht negative reelle Zahl a besitzt genau eine n-te Wurzel $\sqrt[n]{a}$ bzw. die Gleichung $x^n = a$ $(a \geq 0)$ hat genau eine nichtnegative Lsg.

**Die Potenzschreibweise der n-ten Wurzel**

Erinnerung: Für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten gilt $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

Unter der Vorgabe, dass die Rechenregeln für Potenzen weitergelten sollen, liegt eine Potenzschreibweise für die n-te Wurzel nahe. Es gilt nämlich zum Beispiel:
$(\sqrt[3]{2})^3 = 2$.
Eine formale Übernahme der oben erwähnten Regel liefert unmittelbar
$\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^{\frac{1}{3} \cdot 3} = 2^1 = 2$.
Ein Vergleich legt nahe: $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$.
Das Beispiel lässt sich sofort verallgemeinern und führt zu nachfolgender

Definition: Für beliebige $a \in R_0^+$ und $n \in N$ soll gelten: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Beispiele:
1. $81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3$
2. $256^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{256} = 2$
3. $1000^{\frac{1}{3}} = 10$
4. $3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3} = 1,316$

**Die reine Gleichung $x^n = a$**

Beispiele:
1. $x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$
2. $x^3 = -8 \Rightarrow x = -2 = -\sqrt[3]{8} = -\sqrt[3]{|-8|}$
3. $x^4 = 16 \Rightarrow x = \sqrt[4]{16} \vee x = -\sqrt[4]{16}$
4. $x^4 = -16 \Rightarrow L = \{ \}$

Die Ergebnisse aus den Beispielen lassen sich auf analoge Gleichungen mit beliebigen Exponenten verallgemeinern, so dass gilt:

Satz: Die reine Gleichung $x^n = a$ besitzt
bei geradem n für a > 0 die Lösungsmenge $L = \{\sqrt[n]{a}; -\sqrt[n]{a}\}$, für a = 0 die Lösung 0 und für a < 0 keine Lösung,
bei ungeradem n für a > 0 die Lösung $\sqrt[n]{a}$, für a = 0 keine Lösung und für a < 0 die Lösung $-\sqrt[n]{|-a|}$.

## Potenzen mit rationalen Exponenten

Erinnerung: Eines der Potenzgesetze für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten lautet
$(a^m)^n = a^{m\cdot n},\ a \in R\backslash\{0\},\ m, n \in Z.$

Eine sinngemäße Erweiterung und Anwendung dieser Potenzgesetze auf n-te Wurzeln liefert z. B.
$\left(2^{\frac{3}{4}}\right)^4 = 2^{\frac{3}{4}\cdot 4} = 2^3 = 8,$ d.h. $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2^3}$
und
$\left(2^{-\frac{3}{4}}\right)^4 = 2^{-\frac{3}{4}\cdot 4} = 2^{-3} = \frac{1}{8},$ d.h. $2^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{8}} = \sqrt[4]{2^{-3}}$
Eine Verallgemeinerung lautet dann ohne Angabe von Zahlenmengen, aus denen die Platzhalter genommen werden dürfen,
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Vor dem Aufstellen einer allgemeinen Definition ist zu bedenken:
1. Die n-te Wurzel $a^{\frac{1}{n}}$ aus a ist nur für nichtnegative Radikanden a definiert.
2. Wegen der mit negativen Exponenten verknüpften Division ist auch der Basiswert 0 auszuschließen.

Damit liegt die folgende Definition nahe:

Definition: Für alle $a \in R^+$ und $m, n \in N$ soll gelten:
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$; $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

Anwendungen:
1. $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{4096} = 8$
2. $8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}$

Anmerkung: Ein einfaches Beispiel zeigt, dass auch für höhere Wurzeln (bei positiven Radikanden) Potenzieren und Radizieren in der Reihenfolge vertauscht werden dürfen:
$8^{\frac{2}{3}} = 8^{2\cdot\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$
Alternative: $8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{1}{3}\cdot 2} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$

## Formänderung der Bruchexponenten

Ein Bruch kann erweitert oder gekürzt werden, ohne dass sich sein Wert ändert.
Beispiel: $\frac{4}{10} = \frac{2}{5} = \frac{8}{20}$
Dies gilt auch für eine Potenz, wenn der Bruch im Exponenten steht.
Beispiel: $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4;\ 8^{\frac{4}{6}} = \sqrt[6]{8^4} = \sqrt[6]{4096} = 4$

Zu prüfen ist, ob $a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{n\cdot p}{n\cdot q}},\ a \in R\backslash\{0\},\ n, p, q \in Z$ gilt.
Beweis:
$\left(a^{\frac{n\cdot p}{n\cdot q}}\right)^{n\cdot q} = a^{n\cdot p} \Rightarrow a^{\frac{n\cdot p}{n\cdot q}} = \sqrt[n\cdot q]{a^{n\cdot p}}$

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^p$$
$$(a^p)^n = a^{n\cdot p} \Rightarrow a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n\cdot q]{a^{n\cdot p}}$$

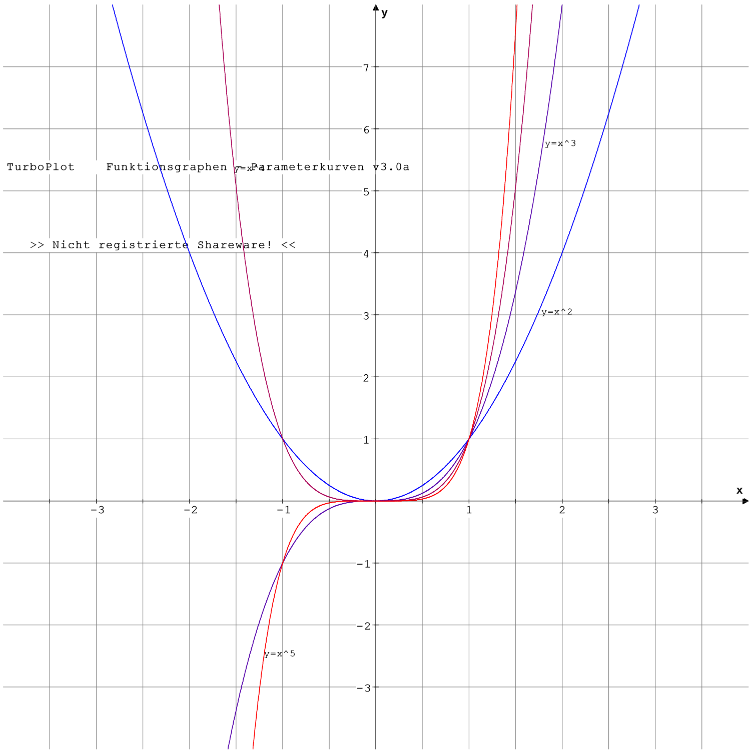
Wegen der Eindeutigkeit der n-ten Wurzel ist der geforderte Beweis erbracht.

> Zusammenfassung: In Potenzen mit rationalen Exponenten dürfen die Exponenten erweitert oder gekürzt werden, ohne dass sich der Wert der Potenzen ändert.

**Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten**

Die quadratische Funktion $f: x \rightarrow x^2$ ist der Prototyp einer Potenzfunktion des Typs $f_n: x \rightarrow x^n,\ n \in \mathbb{N}$.

Die zugehörigen Graphen haben folgendes Aussehen:



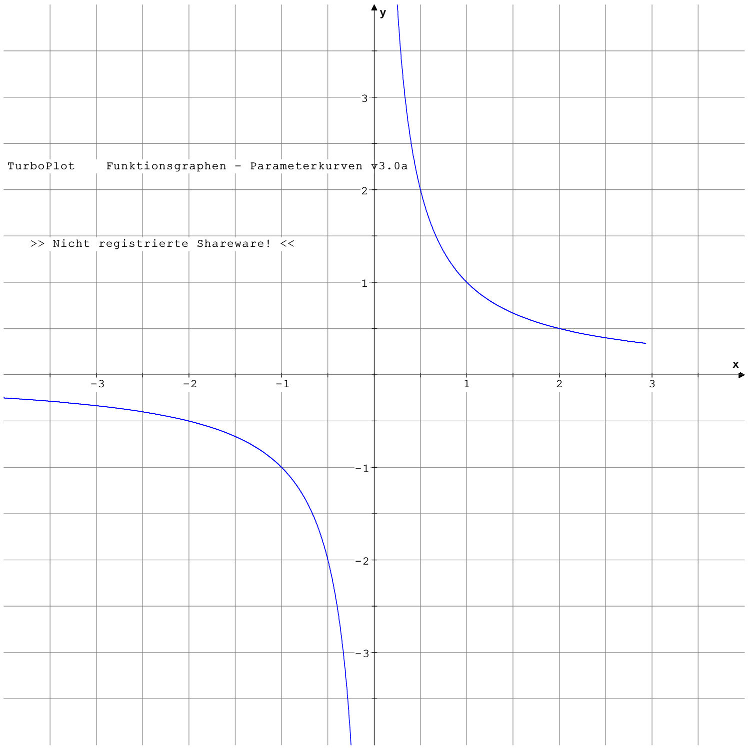

Die Graphen diese Potenzfunktionen heißen Parablen n-ter Ordnung; sie haben die folgenden unmittelbar einsichtigen wesentlichen Eigenschaften:

- Die Graphen sind für gerade Exponenten achsensymmetrisch zur y-Achse, für ungerade Exponenten punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.
- Die Wertemenge ist für gerade Exponenten $W = \mathbb{R}_0^+$, für ungerade Exponenten $W = \mathbb{R}$.
- Für gerade Exponenten sind die Graphen für $x \in \mathbb{R}^-$ streng monoton fallend und für $x \in \mathbb{R}^+$ streng monoton steigend, für ungerade Exponenten sind die Graphen streng monoton steigend.

## Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten

Mit der Kenntnis der Potenzen mit rationalen Exponenten lassen sich auch die daraus folgenden Potenzfunktionen leicht untersuchen.

Zunächst sollen exemplarisch die Funktionen $f: x \to x^{-1} = \frac{1}{x}$ und $g: x \to x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ betrachtet werden. Ihre zugehörigen Graphen haben das nachfolgende Aussehen, wie man etwa mit einer Wertetabelle einfach bestätigen kann:




Aus der Definition folgen unmittelbar die wesentlichen Eigenschaften dieser so genannten Hyperbeln n-ter Ordnung:

- $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
- Für gerade Exponenten gilt $W = \mathbb{R}^+$, für ungerade Exponenten $W = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
- Für gerade Exponenten sind die Graphen für $x \in \mathbb{R}^-$ streng monoton steigend und für $x \in \mathbb{R}^+$ streng monoton fallend, für ungerade Exponenten sind die Graphen sowohl für $x \in \mathbb{R}^-$ als auch für $x \in \mathbb{R}^+$ streng monoton fallend.
- Die Koordinatenachsen sind Asymptoten, d. h. Geraden, denen sich die Graphen für $x \to 0$ als auch für $x \to \pm\infty$ beliebig annähern.

Ein Anwendungsbeispiel:

Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz ziehen sich zwei Massenpunkte mit den Massen $m_1$ und $m_2$ im Abstand r mit der Kraft $F = G \cdot \frac{m1 \cdot m_2}{r^2}$ an, wobei G die Gravitationskonstante mit dem Wert $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$ ist. Dies gilt auch für kugelförmige, gleichmäßig mit Masse erfüllte Körper, deren Mittelpunkte voneinander den Abstand r haben.

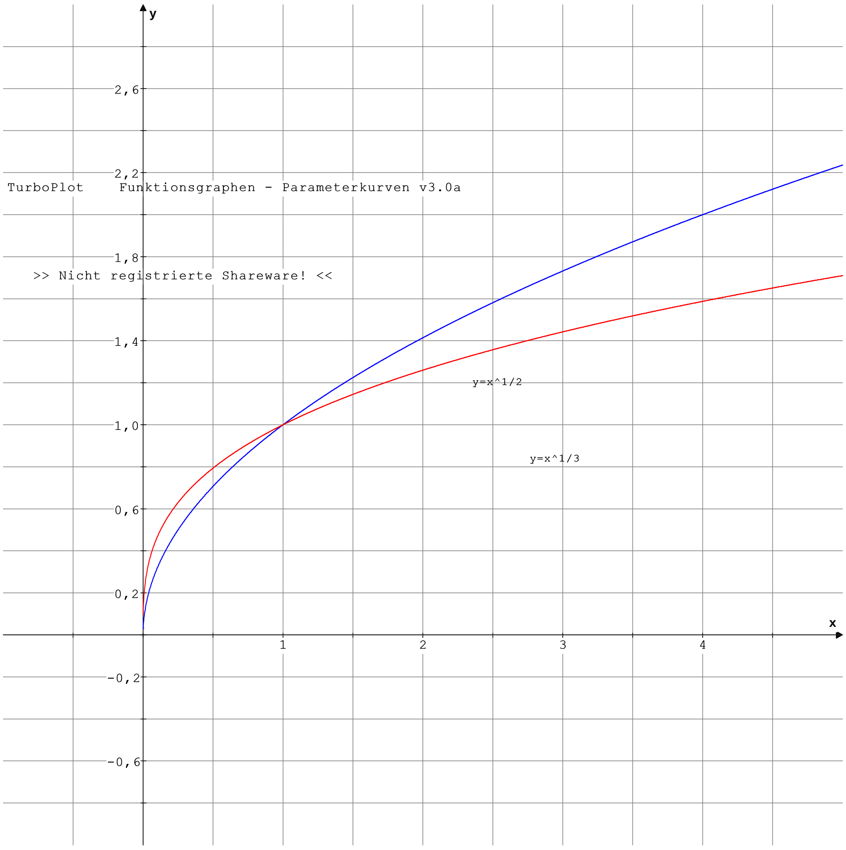
a) Ein Körper der Masse m hat auf der Erdoberfläche (Erdmasse $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$kg, Abstand vom Erdmittelpunkt = Erdradius = $R = 6{,}37 \cdot 10^{6}$m) das Gewicht $F = m \cdot 10\frac{N}{kg}$ ; der Faktor $g = 10\frac{N}{kg}$ ist auch als Ortsfaktor bekannt.

b) In 6370 km (= Erdradius) Höhe über der Erde, d. h. also bei doppeltem r, ist das Gewicht eines Körpers nur mehr ein Viertel des Gewichts auf der Erdoberfläche.

**Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten (Wurzelfunktionen)**

Es sollen nunmehr als Beispiele für Wurzelfunktionen die Funktionen $f: x \to x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ und $g: x \to x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ betrachtet werden.

Die zugehörigen Graphen sehen so aus:




Aus der Definition der Wurzelfunktion und den Graphen folgen wieder die wesentlichen Eigenschaften:

v $D = ‘^{+}_{0}$, $W = ‘^{+}_{0}$
v Die Graphen sind streng monoton steigend.

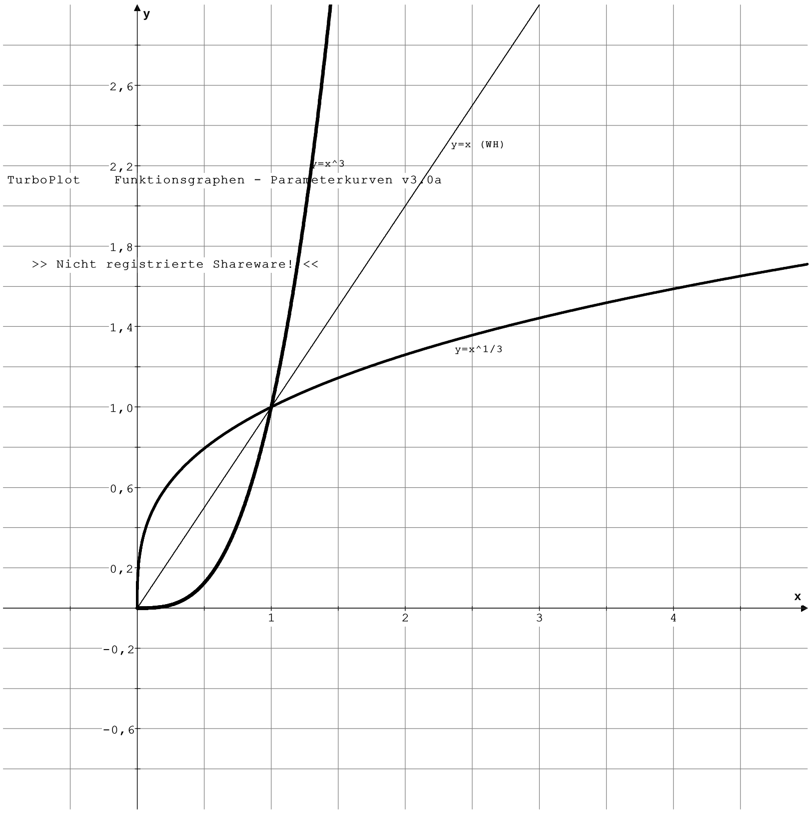
Die Wurzelfunktionen sind die Umkehrfunktionen der Potenzfunktionen, wie sich leicht nachweisen lässt, wenn man formal x und y vertauscht und dann wieder nach y auflöst:
$f: y = x^{n}$

$x = y^n$
$(y^n)^{\frac{1}{n}} = y = x^{\frac{1}{n}}$
$f^{-1}: y = x^{\frac{1}{n}}$

Von der Umkehrung linearer Funktionen ist folgendes bekannt:

- $D_{f^{-1}} = W_f, \; W_{f^{-1}} = D_f$
- Die Graphen von Funktion und Umkehrfunktion liegen symmetrisch bzgl. des I. und III. Quadranten.

Die skizzierten Eigenschaften lassen sich z. B. an den Graphen von
$f: y = x^3$ und $g: y = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ für $x \geq 0$ zeigen:




Auch dazu soll noch ein Anwendungsbeispiel angegeben werden:

Johannes Kepler (1571 - 1630) entdeckte 1618, dass die Umlaufzeit eines Planeten um die Sonne mit seiner mittleren Entfernung E von der Sonne zusammenhängt. Es gilt:
$E = 2{,}9 \cdot t^{\frac{2}{3}}$, wobei E die Entfernung in $10^6$ km und t die Umlaufzeit in Tagen ist.

a) Merkur hat eine Umlaufzeit von 88 Tagen. Wie groß ist seine Entfernung von der Sonne?

b) wie groß ist die Entfernung Erde - Sonne?