A5 Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion

A5 Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion

Wachstums- und Zerfallsprozesse

1. Beispiel: Bakterien können sich sehr schnell vermehren. Eine bestimmte Bakterienart vermehrt sich in jeder Stunde um 30 % des Werts am Anfang der jeweiligen Stunde. Bei der Berechnung der Bakterienzahlen zur Zeit t muss bedacht werden, dass sich die Basis der Berechnung jede Stunde erhöht! Zur Zeit t = 0 sei die Bakterienzahl $N_0 = 100$.
Tabelle:

t in h	Basis	Bakterienanzahl
0	100	100
1	100	$100 \cdot 1{,}3$
2	$100 \cdot 1{,}3$	$100 \cdot 1{,}3 \cdot 1{,}3 = 100 \cdot 1{,}3^2$
3	$100 \cdot 1{,}3^2$	$100 \cdot 1{,}3^2 \cdot 1{,}3 = 100 \cdot 1{,}3^3$
4	$100 \cdot 1{,}3^3$	$100 \cdot 1{,}3^3 \cdot 1{,}3 = 100 \cdot 1{,}3^4$
5	$100 \cdot 1{,}3^4$	$100 \cdot 1{,}3^4 \cdot 1{,}3 = 100 \cdot 1{,}3^5$

Man erkennt sofort, dass das Wachstum in gleichen Zeitabschnitten mit konstantem Wachstumsfaktor verläuft; die Bakterienzahl zur Zeit t kann mit einer Gleichung des Typs
$f: x \to b \cdot a^x$
beschrieben werden, wobei x die Variable (im Beispiel die Zeit t), b der Anfangswert (im Beispiel 100) und a der Wachstumsfaktor (im Beispiel 1,3) ist.

2. Beispiel: Das radioaktive Gas Radon 220 zerfällt mit einer Halbwertszeit T = 55 s, d. h. nach jeweils 55 s ist nur mehr die Hälfte der zu Beginn dieses Zeitraums vorhandenen Rn-Atome übrig geblieben; die jeweils andere Hälfte ist zerfallen. Es ist nach dem Ergebnis des ersten Beispiels leicht zu verstehen, dass für die überlebenden Rn-Atome zur Zeit t die Gleichung
$N(t) = N_0 \cdot (\frac{1}{2})^{\frac{t}{T}}$
gilt, wobei N_0 die Anzahl der ursprünglich vorhandenen Rn-Atome und t die Zeit ist, zu der noch N(t) Rn-Atome “überlebt haben.

Die Exponentialfunktion f: $x \to a^x$

Die Beispiele aus dem ersten Abschnitt führen in der Verallgemeinerung zu so genannten Exponentialfunktionen des Typs
$f: x \to a^x$.
Mit diesen Funktionen wollen wir uns im Folgenden beschäftigen.

Vorüberlegungen:

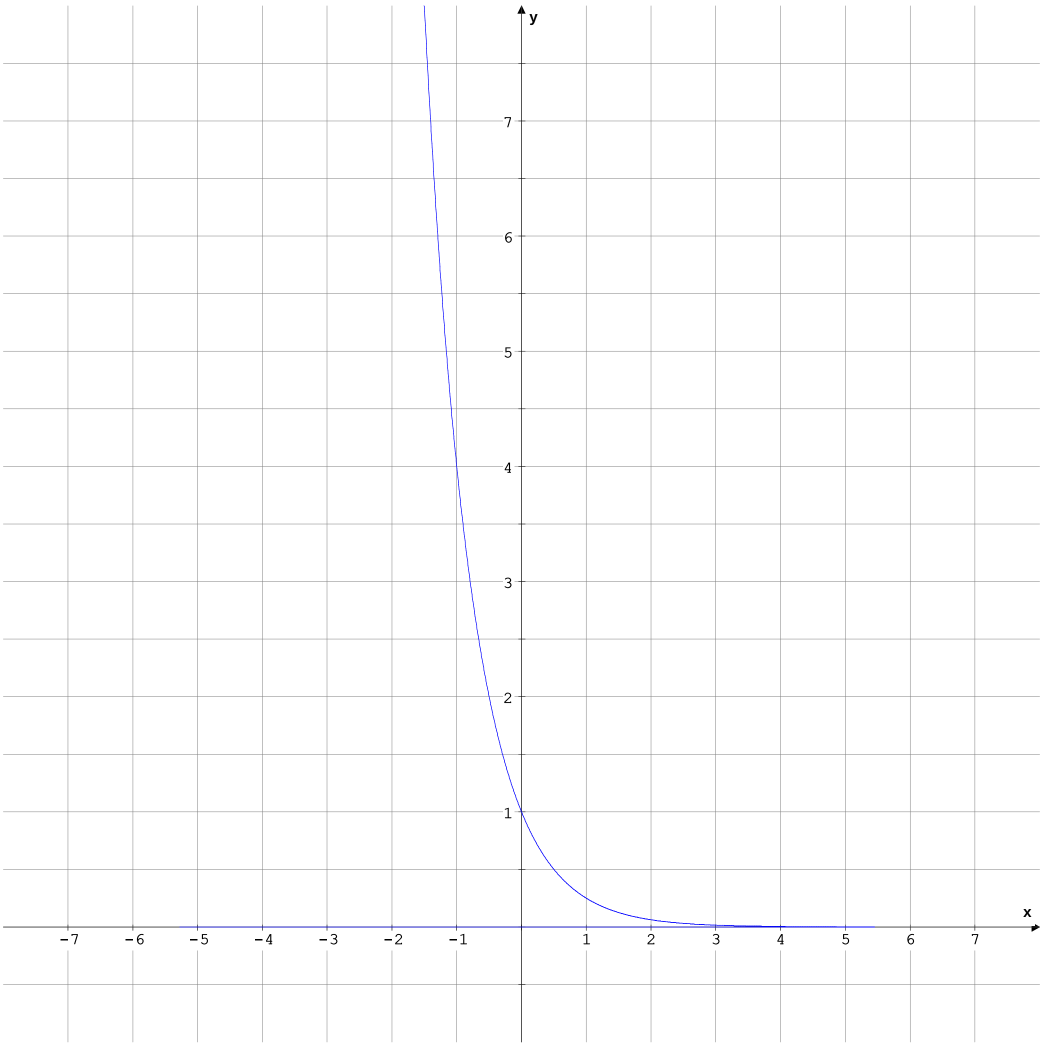
Die Potenz a^x ist für alle reellen Zahlen x erklärt, wenn $a \in R^+$ ist. Ferner gilt dann $1^x = 1$ für alle $x \in R$.

> Def.: Es sei $a \in R^+$ fest vorgegeben. Dann heißt die Funktion $f : x \to a^x$ Exponentialfunktion.

Eigenschaften der Exponentialfunktion $f : x \to a^x$ mit $a \in R^+ \backslash \{1\}$:

1. $D_f = R$
2. Alle Funktionsgraphen verlaufen oberhalb der x-Achse.
3. $a^0 = 1$ für alle $a \in R^+ \backslash \{1\}$. Alle Graphen besitzen also den gemeinsamen Punkt P(0; 1).
4. Für $a > 1$ steigen die Funktionskurven streng monoton an, für $0 < a < 1$ fallen sie streng monoton.

Graphen:



Anmerkung: Die Funktionswerte einer Exponentialfunktion des Typs $f: x \to a^x$ nehmen jeweils auf den a-fachen Wert zu, wenn das Argument x um 1 erhöht wird.

Wachstums- und Zerfallsprozesse (zweiter Teil)

Wachstums- und Zerfallsprozesse, bei denen sich die Anzahlen während konstanter Zeitintervalle um einen konstanten Faktor ändert, werden durch die Gleichung $f: x \to b \cdot a^x$ beschrieben.

Beispiel: Ein Kapital K_0 = 1000 € soll mit p = 10 % jährlich verzinst werden. Wie entwickelt sich das Kapital im Laufe der Zeit, wenn die Zinsen jeweils dem Kapital zugeschlagen werden?

Jahr	Kapitalbasis in €	Kapital + Zinsen in €
0	1.000	1.000
1	1.000	$1000 \cdot 1{,}1$
2	$1000 \cdot 1{,}1$	$1000 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}1$
3	$1000 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}1$	$1000 \cdot 1{,}1^3$
x	$1000 \cdot 1{,}1^{x-1}$	$1000 \cdot 1{,}1^x$

Man erkennt, dass b = 1000 und a = 1,1 ist. 1,1 - 1 = 0,1 = 10 % ist der jährliche Zinssatz (Steigerungssatz).

Analog erhält man für a < 1 eine Abnahme.

Beispiel:
Ein Auto mit dem Neuwert W_0 verliert erfahrungsgemäß jährlich ungefähr 20 % seines Wertes vom Jahresanfang. Dann wird der W(t) zur Zeit t (in Jahren) mit der Funktion
$W(t) = W_0 \cdot 0{,}8^t$
beschrieben.

Zusammenfassung: Es seien $a, b \in \mathbb{R}^+$ fest vorgegeben. Dann werden durch die Funktion $f: x \to b \cdot a^x$ Wachstums- und Zerfallsvorgänge beschrieben.
b ist der Bestand zum Zeitpunkt x = 0. Für a > 1 beschreibt die Exponentialfunktion einen Wachstums-, für 0 < a < 1 einen Zerfallsprozess. a heißt Wachstumsfaktor, a - 1 ist der Bruchteil, um den der Bestand zunimmt bzw. abnimmt, wenn x um eine Einheit zunimmt.

Eine Besonderheit lässt sich z. B. beim radioaktiven Zerfall beobachten. In einer bestimmten Zeit zerfällt ein bestimmter Bruchteil der anfänglich vorhandenen Teilchen N_0. Es lässt sich für jedes radioaktive Element ein Zeitintervall T angeben, in dem die Hälfte von N_0 zerfällt bzw. die andere Hälfte übrig bleibt. Nach 2T ist dann noch ein Viertel, nach 3T noch ein Achtel von N_0 übrig. Dieser Vorgang lässt sich mit einer leicht modifizierten Exponentialfunktion beschreiben:
$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$

Zusammenhang: Die Exponentialfunktion $f: x \to b \cdot (\frac{1}{2})^x$ mit $x = \frac{t}{T}$ beschreibt einen Zerfalls- oder Abklingvorgang. b ist der Bestand zur Zeit t = 0. T ist die Halbwertszeit.

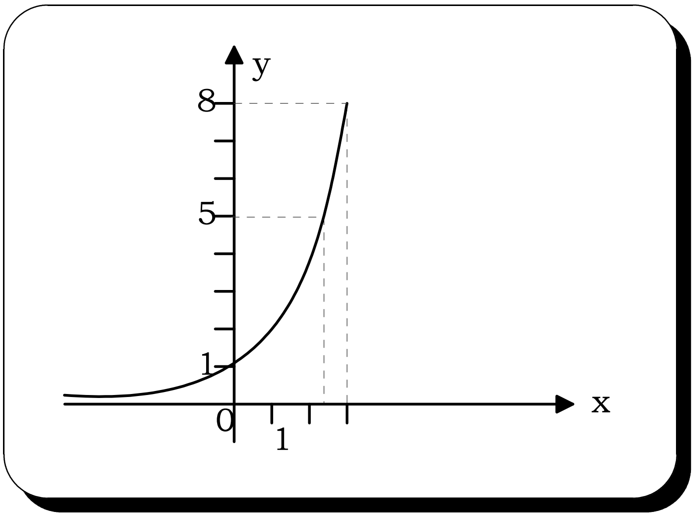
Der Logarithmus

Zur Erinnerung sei an die allgemeine Vorgangsweise beim Bilden der Umkehrfunktion erinnert:

1. Auflösen der Funktionsgleichung nach x
2. Vertauschen der Variablen
3. Anpassen der Mengen: D* = W, W* = D
4. Die Graphen von Funktion f und Umkehrfunktion f^{-1} liegen symmetrisch bzgl. der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten.

Diese Grundsätze sollen nunmehr auf Exponentialfunktionen angewandt werden.

Beispiel:
Gegeben ist die Funktion f: $x \to 2^x$, D_f = R. An welchen Stellen hat die Funktion die Funktionswerte 8 bzw. 5?
Graphische Veranschaulichung:



Lösung: Das Problem führt auf die Exponentialgleichungen
$2^x = 8$ und $2^x = 5$.
Die erste Gleichung ist leicht zu lösen: $2^x = 8 = 2^3 \Rightarrow x = 3$. Wegen der strengen Monotonie der Exponentialfunktion ist dies auch die einzige Lösung.
Die zweite Gleichung hat ebenfalls genau eine Lösung, doch ist diese nicht elementar zu erhalten. Sie heißt $\log_2 7$.

Definition: Es seien $a \in R^+\backslash\{1\}$ und $r \in R^+$. Dann heißt die (eindeutig bestimmte) Lösung der Exponentialgleichung $a^x = r$ Logarithmus von r zur Basis a:
$a^x = r \Leftrightarrow x = \log_a r$.

Beispiele:

1. $2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3$
2. $5^{-4} = \frac{1}{625} \Leftrightarrow \log_5 \frac{1}{625} = -4$
3. $\log_a a=1$, weil $a^1 = a$
4. $\log_a a^x = x$, weil $a^x = a^x$
5. $\log_a 1 = 0$, weil $a^0 = 1$
6. $\log_{10} 100 = 2$, weil $10^2 = 100$
7. $\log_{10} 0{,}1 = -1$, weil $10^{-1} = 0{,}1$

Logarithmen mit besonderen Basen werden oft abgekürzt geschrieben:

$\log_2(x) = \mathrm{lb}(x)$ $\log_{10}(x) = \lg(x)$ $\log_e(x) = \ln(x)$ (e: Eulersche Zahl: e =2,71)

Die Logarithmusfunktion als Umkehrung der Exponentialfunktion

Die weiter oben beschriebene Vorgehensweise bei der Bildung der Umkehrfunktion soll nun auf Exponentialfunktionen angewandt werden. Vorüberlegung: Alle Exponentialfunktionen f: $x \to a^x$ ($a \in R\backslash\{1\}$) sind streng monoton, also umkehrbar.

Beispiel: f: $x \to 2^x$, D = R, W = R^+.

$y = 2^x$

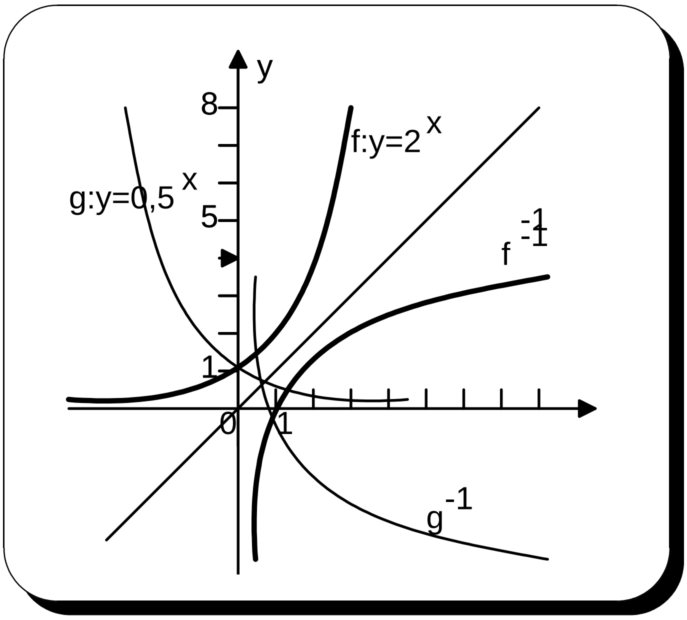
$x = 2^y$ (Vertauschen der Variablen)

$y = \log_2 x$ (Auflösen nach x)

f^{-1}: $x \to \log_2 x$

Definition: Die Logarithmusfunktion f^{-1}: $x \to \log_a x$ ist die Umkehrfunktion der Funktion f: $x \to a^x$ ($a \in R\backslash\{1\}$).

Graphen zur Veranschaulichung:



Aus der Definition der Logarithmusfunktion folgen die wesentlichen Eigenschaften von f: $x \to \log_a x$ ($a \in R\backslash\{1\}$):

1. Alle Logarithmuskurven verlaufen im I. und IV. Quadranten.
2. Alle Logarithmusfunktionen haben D = R^+ und W = R.
3. Alle Logarithmuskurven haben den Punkt P(1; 0) gemeinsam.
4. Die y-Achse ist Asymptote aller Logarithmuskurven.
5. Die Logarithmuskurven sind für
   a > 1 streng monoton steigend,
   0 < a < 1 streng monoton fallend.
6. Die Logarithmuskurve zu f: $x \to \log_a x$ geht durch Spiegelung an der x-Achse aus der Kurve zu $f: x \to \log_{\frac{1}{a}} x$ hervor.

Rechenregeln für Logarithmen

Grundlagen

Für alle a, b § $R^+\backslash\{1\}$, u, v § R^+, x, y § R gilt:

$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$ $\quad$ $a^x : b^x = (a : b)^x$

$a^x \cdot a^y = a^{(x+y)}$ $\quad$ $a^x : a^y = a^{(x-y)}$

$(a^x)^y = a^{(x \cdot y)}$

ferner:

$a^x = u \Leftrightarrow x = \log_a(u)$

> Satz 1: Der Logarithmus eines Produkts ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren.

Beweis:

$x = \log_a(u) \Leftrightarrow u = a^x;\ y = \log_a(v) \Leftrightarrow v = a^y$

$\Rightarrow x + y = \log_a(u) + \log_a(v)$ (*)

$\Rightarrow u \cdot v = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$\Rightarrow x + y = \log_a(u \cdot v)$ (**)

Ein Vergleich von (*) und (**) liefert

$$\boxed{\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)}$$

> Satz 2: Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz aus dem Logarithmus des Dividenden und dem Logarithmus des Divisors.

Beweis:

$x = \log_a(u) \Leftrightarrow u = a^x;\ y = \log_a(v) \Leftrightarrow v = a^y$

$\Rightarrow x - y = \log_a(u) - \log_a(v)$ (*)

$\Rightarrow u : v = a^x : a^y = a^{x-y}$

$\Rightarrow x - y = \log_a(u : v)$ (**)

Ein Vergleich von (*) und (**) liefert

$$\boxed{\log_a(u : v) = \log_a(u) - \log_a(v)}$$

Satz 3: Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt aus dem Exponenten und Logarithmus der Basis.

Beweis:

$u = a^x \Leftrightarrow x = \log_a(u)$ (*)

$u^y = (a^x)^y = a^{(x \cdot y)} = a^{(y \cdot x)}$

$\Rightarrow y \cdot x = \log_a(u^y)$ (**)

Ein Vergleich von (*) und (**) liefert

$y \cdot \log_a(u) = \log_a(u^y)$ bzw.

$$\boxed{\log_a(u^y) = y \cdot \log_a(u)}$$

Satz 4: Der Logarithmus eines Terms zur Basis a ist gleich dem Quotienten aus den Logarithmen von Term und Basis a, jeweils zur Basis b.

Beweis:

$u = a^x \Leftrightarrow x = \log_a(u)$ (*)

$\Rightarrow \log_b(u) = \log_b(a^x) = x \cdot \log_b(a)$

$\Rightarrow x = \log_b(u) : \log_b(a)$ (**)

Ein Vergleich von (*) und (**) liefert

$$\boxed{\log_a(u) = \frac{\log_b(u)}{\log_b(a)}}$$

Dieser letzte Zusammenhang erlaubt die Berechnung von Logarithmen mit den unterschiedlichsten Basen mit den Logarithmen zur Basis 10 bzw. zur Basis e (dazu weiter unten mehr).

Beispiel: $\log_3 100 = \frac{\lg(100)}{\lg(3)}$

Die Eulersche Zahl e

Weiter unten wird die Bedeutung der Eulerschen Zahl e noch deutlich werden. Diese Zahl ist so definiert:

Definition: Die Eulersche Zahl e ist erklärt als Grenzwert $e = \lim\limits_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$.

Die Zahl e lässt sich so annähern:

x	$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$
1	$(1+\frac{1}{1})^1 = 2$
2	$(1+\frac{1}{2})^2 = (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$
3	$(1+\frac{1}{3})^3 = (\frac{4}{3})^3 = \frac{64}{27} = 2\frac{10}{27}$

Die Eulersche Zahl hat den Wert $e \approx 2,71$.

Einfache Exponentialgleichungen

Wegen der strengen Monotonie der Exponentialfunktion f: $x \to a^x$ ($a \in R \backslash \{1\}$) gibt es zu jedem $y \in R^+$ genau ein $x \in R$ mit der Eigenschaft $y = a^x$, d. h. jede Exponentialgleichung ist unter den genannten Bedingungen eindeutig lösbar.

Eine einfache Lösungsstrategie besteht im Herstellen gemeinsamer Basen, weil dann leicht Aussagen über die Exponenten gemacht werden können.

Beispiele:

1. $9 \cdot 3^{3x+2} = 27^{1-3x}$
   ...
   $3^{3x+4} = 3^{3-9x}$
   $3x + 4 = 3 - 9x$
   ...
   $x = -\frac{1}{12}$

2. $5^{x-1} = 100$
   $x - 1 = \log_5 100 = \frac{\lg 100}{\lg 5}$
   $x = 1 + \frac{\lg 100}{\lg 5} = 3,86$