A6 Grenzwert und Stetigkeit reeller Funktionen

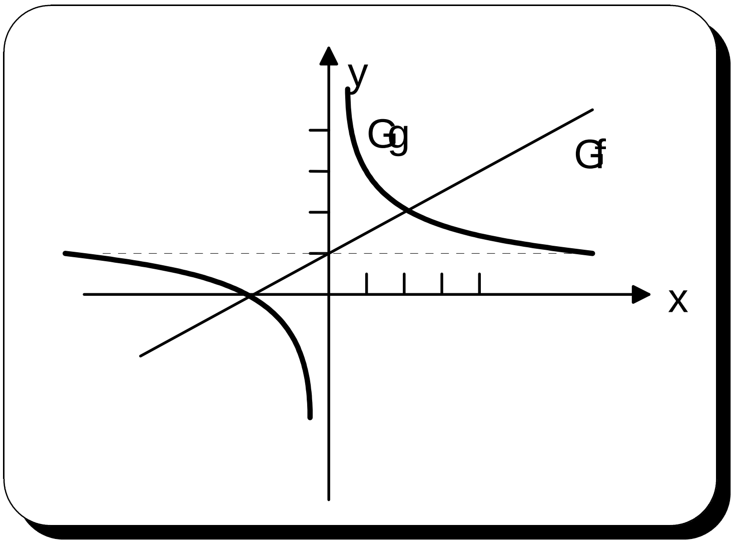
A6.1 Grenzwerte von Funktionen

Grenzwert von Funktionen für x → ±∞

Oft interessiert die Frage, welche Tendenz der Graph einer Funktion zeigt, wenn x über alle Maßen wächst. Dazu werden zunächst folgende Beispiele betrachtet:

Beispiele:
1. f: $x \to 0{,}5 \cdot x + 1$
2. $g: x \to \frac{2}{x} + 1$

Zugehörige Graphen:



Man erkennt sofort:
1. Der Graph von f wächst mit zunehmendem x über alle Maßen.
2. Der Graph von g strebt für $x \to \infty$ gegen den Funktionswert 1, d. h. die Funktionswerte unterscheiden sich beliebig wenig von 1. An der Stelle x = 0 ist die Funktion g nicht erklärt; wenn die x-Werte (von positiven Werten) gegen Null gehen, dann werden die Funktionswerte beliebig groß.

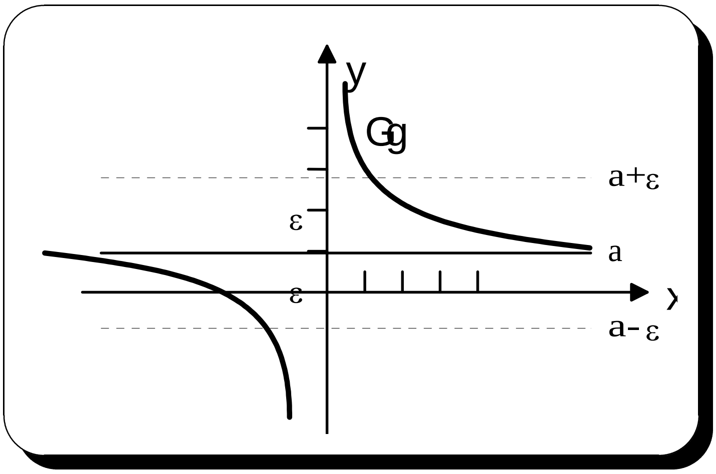
Aus dem Text ("... unterscheidet sich beliebig wenig von a, wenn x überalle Maßen wächst ...") läßt sich sofort folgende Definition verstehen:

Definition: Eine Funktion f hat für $x \to \infty$ den Grenzwert a, wenn sich sich die Funktionswerte beliebig wenig von a unterscheiden, wenn x über alle Maßen wächst.
Schreibweise: $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$.

Der mathematische Nachweis des Grenzwerts benötigt den Begriff der Umgebung:

Definition: Sind $\varepsilon > 0$ und a reelle Zahlen, so versteht man unter der ε-Umgebung von a die Menge $U_\varepsilon(a) =]a-\varepsilon; a+\varepsilon[= \{r \in R \mid |r - a| < \varepsilon\}$.

Veranschaulichung:



Beispiel: Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}+1\right)=1$ gilt.
Beweis:
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf x > 0 vorausgesetzt werden.
$\frac{2}{x}+1 \in U_\varepsilon(1)$ ist äquivalent zu
$\left|\frac{2}{x}+1-1\right| < \varepsilon$ bzw. $\left|\frac{2}{x}\right| < \varepsilon$ bzw. $-\frac{1}{\varepsilon} < \frac{2}{x} < \frac{1}{\varepsilon}$ bzw. $\left|\frac{x}{2}\right| > \frac{1}{\varepsilon}$.
Dies führt zu
$|x| > \frac{2}{\varepsilon}$ bzw. $x > \frac{2}{\varepsilon}$ (x > 0).
Für z. B. $\varepsilon = 0{,}001$ gilt dann x > 2000, d. h. für alle x, die größer als 2000 sind, liegen die Funktionswerte im Intervall I =]0,999; 1,001[.

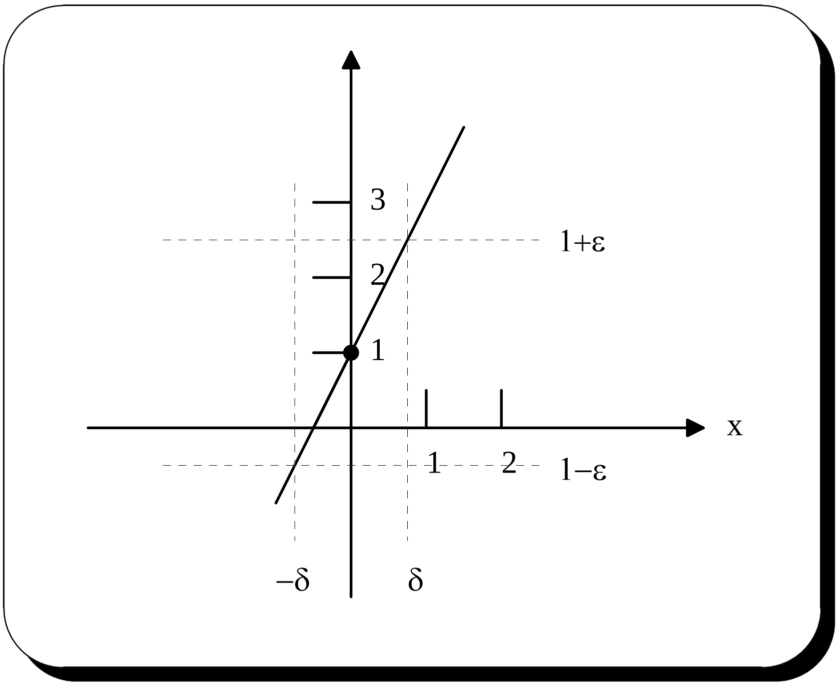
Anmerkungen:

1. Alle bisherigen Überlegungen gelten auch für $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
2. Gelegentlich ist nach einfachen algebraischen Umformungen eine direkte Bestimmung möglich.
   Beispiel: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3\cdot x-2}{4\cdot x^2-3} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}{4-\frac{3}{x^2}} = \frac{1}{4}$.
3. Der Grenzwert einer Funktion für $x \to \infty$ ist, soweit er existiert, eindeutig bestimmt.
   Begründung: Gäbe es zu einer Funktion zwei verschiedene Grenzwerte a_1 und a_2, so würden die Funktionswerte f(x) zu den (beliebig kleinen) Umgebungen zweier unterschiedlicher Zahlen gehören. Dies ist aber nicht möglich.
4. Der Grenzwert von Zahlenfolgen und Zahlenreihen ist analog definiert.

Grenzwert von Funktionen für $x \to x_0$

Das Beispiel im 1. Abschnitt zeigt, dass die Funktion $f: x \to \frac{2}{x}+1$ an der Stelle $x_0 = 0$ nicht erklärt ist. Nähert man sich von rechts her dieser Stelle, dann werden die Funktionswerte unendlich groß, bei Annäherung von links her werden sie unendlich klein. Die Funktion hat also für $x \to 0$ keinen Grenzwert.

Es soll nun die Funktion $f: x \to \frac{2\cdot x^2+x}{x}$, $D_f = D_{max}$, betrachtet werden. Man erkennt sofort, dass die Funktion an der Stelle $x_0 = 0$ nicht erklärt ist. Allerdings läßt sich für jedes $x \neq 0$ der Funktionsterm algebraisch umformen:
$x \neq 0 \Rightarrow f(x) = \frac{2x^2+x}{x} = 2x+1$.
Der zugehörige Graph ist eine Gerade mit einer Unterbrechungsstelle an der Stelle $x_0 = 0$:



Bei Annäherung an die Stelle $x_0 = 0$ nähern sich aber die Funktionswerte beliebig genau dem Wert $y^* = 1$, d. h. die Funktionswerte $f(x)$ unterscheiden sich beliebig wenig vom Wert 1, wenn sich die Argumente x beliebig wenig von 0 unterscheiden, und man kann sagen:
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

Sinnvollerweise gilt dann folgende

Definition: Eine in $D =]x_1; x_2[\setminus\{x_0\}$ definierte Funktion hat für $x \to x_0$ den Grenzwert a, wenn es zu jedem noch so kleinen $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ gibt, so dass $|f(x) - a| < \varepsilon$ gilt, wenn $|x - x_0| < \delta$ zutrifft.

Grenzwertsätze

Für das Rechnen mit Grenzwerten gelten Sätze, die ihre Handhabung wesentlich erleichtern. Sie seien hier ohne Beweis mitgeteilt:

Satz:
Seien $f: x \to f(x)$, D_f und $g: x \to g(x)$, D_g mit $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$ und $D_f \cap D_g \neq \emptyset$ gegeben. Dann gilt:
$\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a+b$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x) = a - b$$
$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = a \cdot b$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{a}{b}, \text{ wenn } b \neq 0.$$

Alternative Formulierung: Grenzwertbildung und rationale Operationen sind in der Reihenfolge vertauschbar.

Beispiel:
$$\lim_{x \to 2} (x^2 - 3 \cdot x + 1) = \lim_{x \to 2} x^2 - 3 \cdot \lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 1 = 4 - 6 + 1 = -1.$$