A7 Differentialrechnung

A7.1 Ableitung

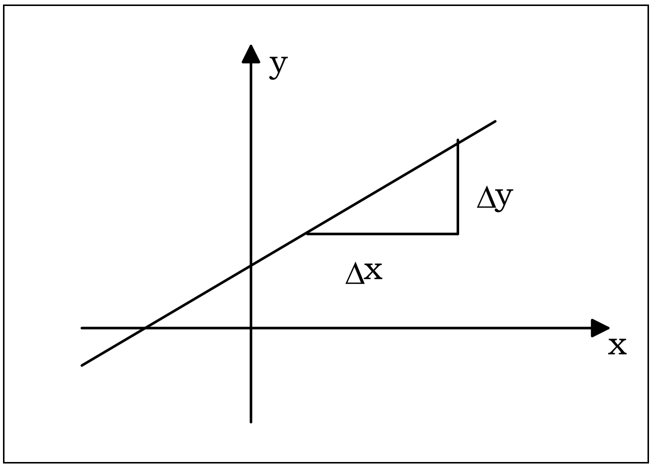
Die Geradensteigung

Das Problem der Steigung einer Geraden wurde bereits weiter oben ausführlich behandelt.

Wiederholung:

Unter der Steigung m einer Geraden zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 versteht man den Differenzenquotienten
$m := \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.
Dieser Quotient ist von der Lage der Punkte P_1 und P_2 auf der Geraden unabhängig.

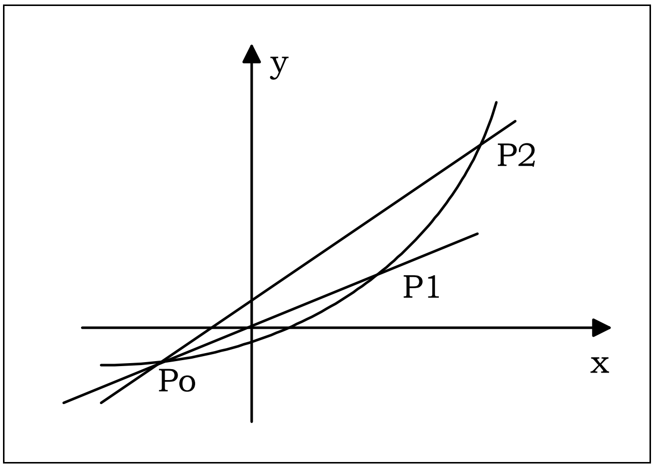
Skizze:



Die Sekantensteigung

Die oben beschriebene Gleichung für die Steigung einer Geraden versagt bei der Suche nach der Steigung einer gekrümmten Kurve. Dann kann nur die Steigung einer Sekanten zwischen zwei Kurvenpunkten berechnet werden; insbesondere kann nicht von der Steigung der Kurve an einer Stelle x_0 bzw. in einem Kurvenpunkt $P_0(x_0; y_0)$ gesprochen werden. Dann hängt der Wert der Sekantensteigung mit einem festen Ausgangspunkt P_0 von der Lage eines weiteren Punktes $P_1(x_1; y_1)$ auf der Kurve ab:
$m := \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

Skizze:



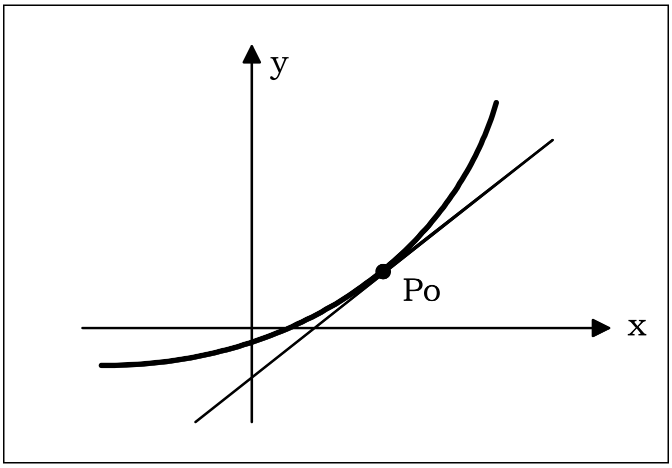
Die Tangentensteigung

Wenn man in obiger Skizze den Punkt P_1 immer näher an den Punkt P_0 heran wandern lässt, dann wird aus der Sekante eine Tangente und man bezeichnet den Grenzwert der Sekantensteigung als Tangentensteigung bzw. als Steigung der Kurve an der Stelle x_0 bzw. im Kurvenpunkt P_0. Der Grenzwert des Differenzenquotienten heißt Differentialquotient:

$$m = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

> Definition: Unter der Steigung einer Kurve in einem Kurvenpunkt P_0 versteht man den Grenzwert der Sekantensteigung zwischen $P_0(x_0; y_0)$ und einem weiteren Kurvenpunkt $Q(x; f(x))$ für $x \to x_0$. Dieser Grenzwert heißt auch Ableitung $f'(x_0)$.

Skizze:



Berechnung von Differentialquotienten

Beispiel 1:
Es ist die Steigung der Kurve zur Funktion $f: y = x^2$ an der Stelle $x_0 = 2$ zu bestimmen.
Lösung:
$m = f'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-2^2}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x+2)\cdot(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} (x+2) = 4.$

Beispiel 2:
Es ist die Steigung der Kurve zur Funktion $f: y = x^2 - 3 \cdot x + 4$ an der Stelle $x_0 = 2$ zu bestimmen.
Lösung:
$f'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-3x+4-2^2+3\cdot 2-4}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-2^2-3\cdot x+3\cdot 2}{x-2} =$
$= \lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-2^2-3\cdot x+3\cdot 2}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x+2)\cdot(x-2)-3\cdot(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)\cdot(x+2-3)}{x-2} == \lim\limits_{x \to 2} (x+2-3) = \lim\limits_{x \to 2} (x-1) = 1.$

Beispiel 3:
Es ist die Steigung der Kurve zur Funktion $f: y = x^3$ an der Stelle $x_0 = 2$ zu bestimmen.
Lösung:
$f'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3-2^3}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)\cdot(x^2+2\cdot x+4)}{x-2} =$
$= \lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 2 \cdot x + 4) = 12.$

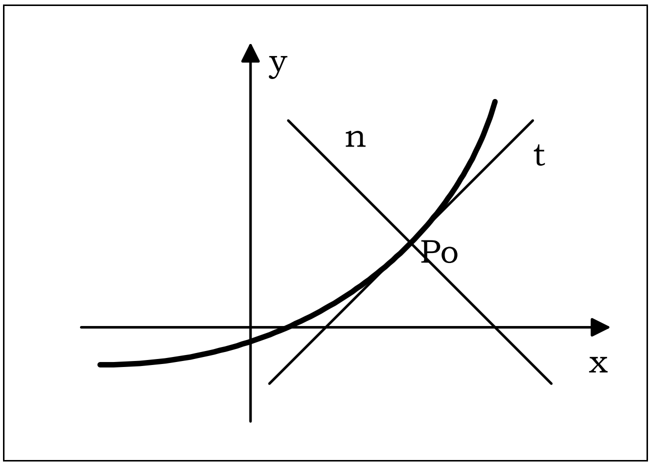
Beispiel 4:
Es ist die Steigung der Kurve zur Funktion $f: y = \frac{1}{x}$ an der Stelle $x_0 = 2$ zu bestimmen.
Lösung:
$f'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{\frac{2-x}{2\cdot x}}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{-\frac{x-2}{2\cdot x}}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{-1}{2\cdot x} = -\frac{1}{4}.$

Tangente und Normale

Erinnerung: Bei der Besprechung linearer Funktionen wurde bereits gezeigt, dass zwei Geraden genau dann aufeinander senkrecht stehen, wenn das Produkt ihrer Steigungen den Wert -1 ergibt.

Definition: Die Normale n in einem Kurvenpunkt $P \in G_f$ ist diejenige Gerade, die die Tangente an G_f in P orthogonal schneidet. Dann gilt für die Steigungen $m_t \cdot m_n = -1$.

Veranschaulichung:



Beispiel:
Bestimme die Gleichung der Tangenten t und der zugehörigen Normalen n an den Graphen von $f: y = x^2 - 3 \cdot x + 4$ an der Stelle $x_0 = 2$.
Lösung:
Die Funktion hat an der Stelle $x_0 = 2$ die Ableitung f'(2) = 1 (siehe oben). Daraus folgt $m_t = 1$ und $m_n = -1$.
Ferner gilt $f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 4 = 2$.
Jede Geradengleichung hat die Form $y = m \cdot x + t$.
Für die Tangente folgt daraus zur Berechnung von t
$2 = 1 \cdot 2 + t \Rightarrow t = 0$
für die Normale erhält man
$2 = -1 \cdot 2 + t \Rightarrow t = 4$.
Die Funktionsgleichung sind dann
$t: y = x$ (Tangente) und
$n: y = -x + 4$.

Differenzierbarkeit einer Funktion

Erinnerung: Die Berechnung der Steigung einer Funktion an einer Stelle x_0 erfolgt durch Bildung des Grenzwerts des Differenzenquotienten
$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (Differenzenquotient von f(x) bzgl. x_0). Dieser Quotient ist eine Funktion von x mit der Definitionsmenge $D = D_f \setminus \{x_0\}$, und es gilt die

Definition: Eine Funktion $f: y = f(x)$ heißt an der Stelle $x_0 \in D_f$ differenzierbar, wenn der Differenzenquotient von f(x) bzgl. x_0 für $x \to x_0$ einen Grenzwert hat.

Anmerkungen:
1. Dieser Grenzwert heißt Ableitung $f'(x_0)$.
2. Die Definition ist äquivalent mit der Formulierung, dass eine Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, wenn der Differenzenquotient an der Stelle x_0 stetig fortsetzbar ist.
3. An einer isolierten Stelle x_0 ist eine Funktion sicher nicht differenzierbar.
4. Für eine vertikale Tangente ist keine Steigung definiert.

5. Existiert die Ableitung von f an der Stelle x_0, so lässt sich der Differenzenquotient immer durch $(x - x_0)$ kürzen.

Als Beispiel soll die folgende Funktion auf Differenzierbarkeit an der Stelle $x_0 = 1,5$ geprüft werden:

$$f: y = \begin{cases} 2 \cdot x - 0,75 & \text{für } x \geq 1,5 \\ x^2 & \text{für } x < 1,5 \end{cases}$$

Rechts- und linksseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten sind getrennt zu berechnen:

$$\lim_{x \to 1,5+0} \frac{f(x)-f(1,5)}{x-1,5} = \lim_{x \to 1,5+0} \frac{2 \cdot x - 0,75 - 2,25}{x-1,5} = \lim_{x \to 1,5+0} \frac{2 \cdot (x-1,5)}{x-1,5} = \lim_{x \to 1,5+0} 2 = 2$$

$$\lim_{x \to 1,5-0} \frac{f(x)-f(1,5)}{x-1,5} = \lim_{x \to 1,5-0} \frac{x^2-2,25}{x-1,5} = \lim_{x \to 1,5-0} \frac{(x+1,5) \cdot (x-1,5)}{x-1,5} =$$

$$= \lim_{x \to 1,5-0} (x+1,5) = 3, \text{ d. h.}$$

$$\lim_{x \to 1,5+0} \frac{f(x)-f(1,5)}{x-1,5} \neq \lim_{x \to 1,5-0} \frac{f(x)-f(1,5)}{x-1,5}.$$

Die Funktion ist also an der Stelle x_0 nicht differenzierbar (wohl aber stetig).

Anmerkung (ohne Beweis):
Eine Funktion, die an der Stelle x_0 differenzierbar ist, ist dort sicher stetig.

Ableitungsfunktion

Die Differenzierbarkeit an der Stelle x_0 ist eine lokale Eigenschaft; sie erfordert die Existenz einer Umgebung um die Stelle x_0; zumindest ist eine einseitige Umgebung notwendig, damit eine Funktion an der Stelle x_0 wenigstens einseitig differenzierbar sein kann. Dann ist die folgende Definition unmittelbar verständlich:

> Definition: Eine Funktion, die an jeder Stelle eines offenen oder abgeschlossenen Intervalls differenzierbar ist, heißt in diesem Intervall differenzierbar.

Wenn eine Funktion in einem Intervall differenzierbar ist, dann wird jedem x aus dem Intervall in eindeutiger Weise eine Ableitung zugeordnet, und es entsteht durch $f': y = f'(x)$ eine neue Funktion, die Ableitungsfunktion.

> Definition: Die zu einer Funktion im Differenzierbarkeitsbereich $D_{f'}$ definierte Funktion $f': y = f'(x)$ heißt die Ableitungsfunktion von f.

Anmerkung:
Definitions- und Differenzierbarkeitsmenge einer Funktion müssen nicht identisch sein (vgl. Beispiel im letzten Abschnitt)!

Zum Nachweis der Differenzierbarkeit einer Funktion in einem Intervall I genügt es, die Differenzierbarkeit für ein beliebiges $x_0 \in I$ nachzuweisen.

Beispiel:

Es ist die Differenzierbarkeit der Funktion $f: y = x^2 - 2$ in I = R nachzuweisen und die Ableitungsfunktion f' zu bestimmen.
Lösung:
$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{(x+x_0)\cdot(x-x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} (x+x_0) = 2 \cdot x_0.$
Man erkennt aus dem Funktionsterm unmittelbar, dass er für alle $x \in$ R erklärt ist, und für die Ableitungsfunktion f' folgt
$f': y = 2 \cdot x.$

Anmerkung:
Für f'(x) haben sich folgende Schreibweisen eingebürgert:
$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x).$

Die Ableitungen einfacher Funktionen

Für die einfachen Funktionstypen lassen sich leicht Ableitungsregeln ermitteln:

1. $f: y = c$
   $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{c-c}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} 0 = 0$
   $f: y = c \Rightarrow f': y = 0$

2. $f: y = x$
   $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} 1 = 1$
   $f: y = x \Rightarrow f': y = 1$

3. $f: y = x^2$
   $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{(x+x_0)\cdot(x-x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} (x+x_0) = 2 \cdot x_0$
   $f: y = x^2 \Rightarrow f': y = 2 \cdot x$

4. $f: y = \sqrt{x}$, $x > 0$
   $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)\cdot\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x_0}}$
   $f: y = \sqrt{x} \Rightarrow f': y = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}, \; x > 0$

5. $f: y = \frac{1}{x}, \; x \neq 0$
   $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\frac{x_0-x}{x\cdot x_0}}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{-1}{x\cdot x_0} = -\frac{1}{x^2}$
   $f: y = \frac{1}{x} \Rightarrow f': y = \frac{-1}{x^2}, \; x \neq 0$

Ableitung von Summe, Differenz und Produkt

Es soll im Folgenden überlegt werden, ob ein einfacher Zusammenhang zwischen der Ableitung z. B. einer Summe (Differenz) und den Ableitungen der Summanden (von Minuend und Subtrahend) bzw. zwischen der Ableitung eines Produkts und den Ableitungen der Faktoren besteht.

Voraussetzung für die nachfolgenden Überlegungen: Alle Teilfunktionen sollen in einem gemeinsamen Intervall I differenzierbar sein.

1. Summenregel:

$f: y = u(x) + v(x)$

$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{u(x) + v(x) - u(x_0) - v(x_0)}{x - x_0} =$

$= \lim\limits_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} + \lim\limits_{x \to x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0) + v'(x_0)$

$f: y = u(x) + v(x) \Rightarrow f': y = u'(x) + v'(x)$

2. Analog gilt:

$f: y = u(x) - v(x) \Rightarrow f': y = u'(x) - v'(x)$

3. Produktregel:

$f: y = u(x) \cdot v(x)$

$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{u(x) \cdot v(x) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{x - x_0} =$

$= \lim\limits_{x \to x_0} \frac{u(x) \cdot v(x) - u(x_0) \cdot v(x) + u(x_0) \cdot v(x) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{x - x_0} =$

$= \lim\limits_{x \to x_0} \frac{u(x) \cdot v(x) - u(x_0) \cdot v(x)}{x - x_0} + \lim\limits_{x \to x_0} \frac{u(x_0) \cdot v(x) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{x - x_0} =$

$= \lim\limits_{x \to x_0} \left[v(x) \cdot \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \right] + \lim\limits_{x \to x_0} \left[u(x_0) \cdot \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} \right] =$

$= \lim\limits_{x \to x_0} v(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} + \lim\limits_{x \to x_0} u(x_0) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} =$

$= v(x_0) \cdot u'(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0)$

$f y = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f': y = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

4. Quotientenregel (ohne Beweis):

$f: y = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f': x \to \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2},\ v(x) \neq 0 \wedge u(x) \neq 0$

Anwendungsbeispiele:

1. $f y = x^2 + 5;\ u(x) = x^2,\ v(x) = 5$
   $u'(x) = 2 \cdot x;\ v'(x) = 0$
   $f': y = 2 \cdot x$
2. $f: y = 5 \cdot x^2;\ u(x) = 5;\ v(x) = x^2$
   $u'(x) = 0;\ v'(x) = 2 \cdot x$
   $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
   $f': y = 5 \cdot (2 \cdot x)$

Anmerkungen:

1. Eine Summe darf summandenweise differenziert werden.
2. Ein konstanter Summand verschwindet beim Differenzieren.
3. Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten.

Die Ableitung der Potenzfunktion f: y = x^n

Mit Hilfe der Produktregel lässt sich leicht die Ableitung einer jeden Potenzfunktion $f: y = x^n$ ermitteln:

Beispiele:

$f y = x^3 = x^2 \cdot x$

$u(x) = x^2;\ v(x) = x$
$u(x) = x^2;\ v(x) = x$
$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 2x^2 + x^2 = 3 \cdot x^2$
$f : y = x^3 \Rightarrow f' : y = 3 \cdot x^2$

$fy = x^5 = x^3 \cdot x^2$
$u(x) = x^3;\ v(x) = x^2$
$u'(x) = 3x^2;\ v(x) = 2x$
$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = 3x^2 \cdot x^2 + x^3 \cdot 2x = 2x^2 + x^2 = 3 \cdot x^4 + 2 \cdot x^4 = 5 \cdot x^4$
$f : y = x^5 \Rightarrow f' : y = 5 \cdot x^4$

Allgemein (ohne Beweis):
$f : y = x^n \Rightarrow f' : y = n \cdot x^{n-1}$ (zunächst gültig für $n \in N$)

Mit der Summen- und Produktregel sowie der Regel für die Ableitung der Potenzfunktion lässt sich die Ableitung der ganzrationalen Funktion leicht bestimmen:

f: $y = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots a_i \cdot x^i + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$
f': $y = n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + (n - 1) \cdot a_{n-1} \cdot x^{n-2} + \dots i \cdot a_i \cdot x^{i-1} + \dots + 2 \cdot a_2 \cdot x + a_1$

Damit ist folgender Satz verständlich:

Satz: Die ganzrationale Funktion
f: $y = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots a_i \cdot x^i + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$, $a_i \in R$, $x \in R$,
ist in R differenzierbar. Ihre Ableitungsfunktion ist
f': $y = n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + (n - 1) \cdot a_{n-1} \cdot x^{n-2} + \dots i \cdot a_i \cdot x^{i-1} + \dots + 2 \cdot a_2 \cdot x + a_1$.

Die Kettenregel

Ohne Beweis: Für eine verkettete Funktion f(x) = h(g(x)) mit geeigneten Differenzierbarkeitsmengen gilt die so genannte

Kettenregel:
$f(x) = h(g(x)) \Rightarrow f'(x) = h'(u) \cdot g'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$, wobei $u = g(x)$,
in der Leibnizschen Form
$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

Man nennt dieses Vorgehen ableiten mit nachdifferenzieren.

Beispiel:

$f(x) = (x^2 - 3 \cdot x)^5$ bzw. $f(u(x))$ mit $f(u) = u^5$ und $u(x) = x^2 - 3 \cdot x$

Dann gilt: $f'(u) = 5 \cdot u^4$ und $u'(x) = 2 \cdot x - 3$,

also $f'(x) = 5 \cdot u^4 \cdot (2 \cdot x - 3) = 5 \cdot (x^2 - 3 \cdot x)^4 \cdot (2 \cdot x - 3)$

Höhere Ableitungen

Häufig ist die Ableitungsfunktion f' zu einer in D' differenzierbaren Funktion f in D' ebenfalls differenzierbar. In diesem Fall gibt es auch zu f' eine Ableitungsfunktion, die mit f'' bezeichnet wird. f'' heißt dann 2. Ableitung von f.

Beispiel:
f: $y = x^3$
f': $y = 3 \cdot x^2$
f'': $y = 6 \cdot x$
f''': $y = 6$
f^{IV}: $y = 0$

Daraus folgt die folgende

> Definition: Eine Funktion f, deren n-te Ableitung $f^{(n)}$ in einer gewissen Menge existiert, heißt dort n-mal differenzierbar.