A7.3 Diskussion der Exponentialfunktion $x \to a \cdot e^{k \cdot x}$, Verknüpfung mit linearen Funktionen, Wachstums- und Zerfallsprozesse

Die Exponentialfunktion $f: x \to a \cdot e^{k \cdot x}$

Zur Bestimmung der Ableitungsfunktion der Potenzfunktion $f: x \to a^x$ bilden wir in gewohnter Art den Grenzwert des Differenzenquotienten.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Zur Vereinfachung der Berechnung wird an dieser Stelle eine Hilfsvariable h > 0 eingeführt, so dass
$x = x_0 + h$
und
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
gilt.

Auf die Exponentialfunktion angewandt ergibt sich nacheinander für den Differenzenquotienten
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{a^{x_0+h}-a^{x_0}}{h} = \frac{a^h \cdot a^{x_0}-a^{x_0}}{h} = \frac{a^{x_0} \cdot (a^h-1)}{h} = a^{x_0} \cdot \frac{a^h-1}{h}$$

Es ist unmittelbar zu erkennen, dass sich die Exponentialfunktion beim Ableiten im Wesentlichen reproduziert; die Grenzwertbildung erstreckt sich nur auf den von h abhängigen Term $\frac{a^h-1}{h}$. Dieser kann näherungsweise bestimmt werden.

Für z. B. a = 2 erhält man:

h	(2^h-1)/h
1	1,000000
0,1	0,717735
0,01	0,695555
0,001	0,693387
0,0001	0,693171
0,00001	0,693150
0,000001	0,693147

Der Vergleich mit ln(2) zeigt sofort, dass offenbar

$$\lim_{h \to 0} \frac{2^h-1}{h} = \ln(2) \text{ bzw. } \lim_{h \to 0} \frac{a^h-1}{h} = \ln(a)$$

gilt. Der mathematische Beweis kann im Rahmen dieses Kurses nicht geführt werden!

Damit ergibt sich für die Ableitung der Exponentialfunktion unmittelbar:

A7-3-alt.lwp erstellt am 20.07.2015

$$f: x \to a^x \Rightarrow f': x \to a^x \cdot \ln(a),\ a > 0$$

Es folgt weiterhin wegen ln(e) = 1:

$f: x \to e^x \Rightarrow f': x \to e^x$

sowie mit der Kettenregel und der Produktregel

$$f: x \to a \cdot e^{k \cdot x} \Rightarrow f': x \to a \cdot k \cdot e^{k \cdot x}$$

Diese Gleichung bedeutet, dass jede Exponentialgleichung sich beim Ableiten reproduziert.

Wachstums- und Zerfallsprozesse

Mit Hilfe der e-Funktion $f: x \to a \cdot e^{k \cdot x}$ und ihrer Ableitungen lassen sich Wachstums- und Zerfallsprozesse besonders leicht darstellen und untersuchen.

Beispiel 1: Bevölkerungswachstum

Das Wachstum ΔN einer Population innerhalb des Zeitraum von t bis t + Δt ist in sehr guter Näherung proportional zum Zeitpunkt Δt, innerhalb dessen die Population betrachtet wird, und proportional zur Population N(t) zu Beginn des Zeitintervalls Δt:

$$\left.\begin{array}{c} \Delta N \sim N(t) \\ \Delta N \sim \Delta t \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta N \sim N(t) \cdot \Delta t$$

Daraus folgt unmittelbar

$\frac{\Delta N}{\Delta t} \sim N(t)$ bzw. $\frac{\Delta N}{\Delta t} = C \cdot N(t)$

Diese Gleichung gilt für jeden Zeitpunkt t bzw. in jedem noch so kleinen Zeitintervall Δt, so dass für das infinitesimal kleine Zeitintervall dt die Differentialgleichung

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{dN}{dt} = \dot{N}(t) = C \cdot N(t)$$

folgt. Diese Gleichung besagt, dass in jedem Zeitpunkt t die Funktion N(t) proportional zu ihrer ersten Ableitung $\dot{N}(t)$ ist. Ihre Beschreibung ist also mit Hilfe einer Exponentialfunktion möglich.

Es ist unmittelbar einzusehen, dass die Gleichung

$N(t) = N_0 \cdot e^{k \cdot t} \ \Rightarrow \ \dot{N}(t) = k \cdot N_0 \cdot e^{k \cdot t}$

(N_0: Anzahl der anfangs vorhandenen Individuen, k: Wachstumsfaktor)
die geforderten Eigenschaften besitzt, d. h. die oben angeschriebene Differentialgleichung erfüllt.

Anwendung: Eine Bevölkerung N_0 = 100000 vermehre sich jährlich netto um 1 %.
a) Berechne die Bevölkerungszahl nach 30 Jahren.
b) Wann hat sich die Bevölkerung verdoppelt?

Lösung:

a) $N(t=1) = 1,01 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{k \cdot 1a}$
$1,01 = e^{k \cdot 1a}$
$k \cdot 1a = \ln(1,01)$
$k = \frac{\ln(1,01)}{1a} = 9,95 \cdot 10^{-3} a^{-1}$
$N(30a) = 100000 \cdot e^{9,95 \cdot 10^{-3} a^{-1} \cdot 30a} = 134785$

b) $N(T) = 2 \cdot N_0$
$2 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{k \cdot T}$
$\ln(2) = k \cdot T$
$T = \frac{\ln 2}{k} = 69,7a$

Beispiel 2: radioaktiver Zerfall

Das radioaktive Gas Radon zerfällt mit der Halbwertszeit T = 55 s. Stelle die Zerfallsgleichung auf berechne, wie viele Rn-Atome von anfänglich N_0 = 100000 nach 200 s bereits zerfallen sind.

Lösung:

Die Zerfallsgleichung hat die Form
$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$,
wobei N_0 die Zahl der anfangs vorhandenen Teilchen und λ die (hier zunächst noch unbekannte) Zerfallskonstante ist. Diese kann aber aus der Halbwertszeit T leicht berechnet werden:
Zur Zeit T ist von anfänglich N_0 Teilchen noch die Hälfte übrig, d. h.
$N(T) = \frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot T}$
Dividieren durch N_0 und beidseitiges Logarithmieren liefert
$\ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2 = -\lambda \cdot T$ bzw. $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$,
so dass die Zerfallsgleichung auch so geschrieben werden kann:
$N(t) = N_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T} \cdot t}$
Für die Anzahl der zerfallenen Atome gilt
$\Delta N = N_0 - N(200s) = N_0 - N_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{55s} \cdot 200s} = N_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{55s} \cdot 200s}\right) = N_0 \cdot 0,92$
Es sind also ca. 92 % der anfangs vorhandenen Atome schon zerfallen.