A8 Integralrechnung

A8.1 Stammfunktionen; Berechnung bestimmter Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen

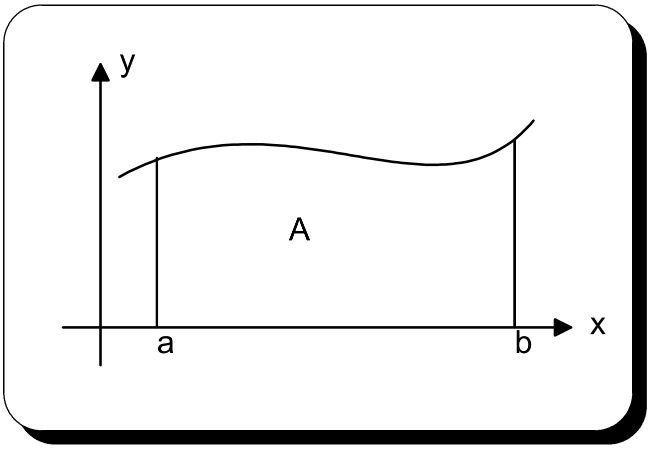
Das Grundproblem bei der Integralrechnung

Erinnerung: Das Hauptproblem der Differentialrechnung ist die Bestimmung der Steigung der Tangenten an eine Kurve in einem bestimmten Kurvenpunkt.

Nun soll eine zunächst völlig andere Fragestellung untersucht werden, die Bestimmung des Flächeninhalts einer krummlinig begrenzten Figur. Bislang wurden die Inhalte einfacher Flächen wie Quadrate, Rechtecke, Trapez und Kreis bestimmt. Krummlinig begrenzt war davon lediglich der Kreis.

Nun soll der Inhalt einer Figur wie der nachfolgend skizzierten bestimmt werden, wenn die Funktionsvorschrift $y = f(x)$ bekannt ist.

Skizze:



Einschränkung: Wir beschränken uns bei den nachfolgenden Überlegungen ausschließlich auf einfache, in D_f stetige Funktionen.

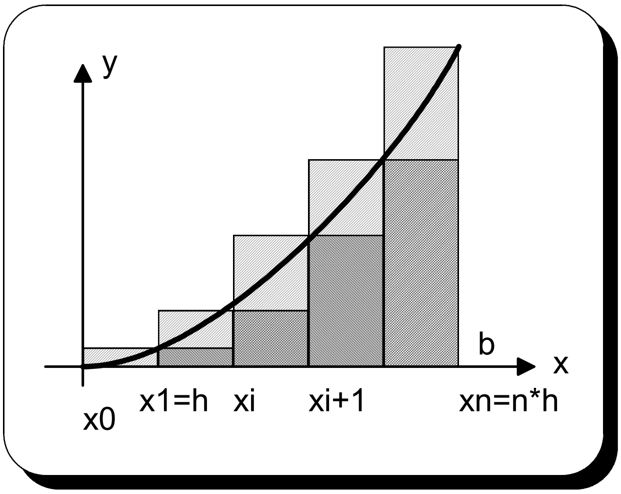
Einführungsbeispiel:
Es soll der Inhalt der von der x-Achse, der Geraden mit $x = b$ $(b > 0)$ und dem Graphen von $f\colon \to x^2$ begrenz wird, berechnet werden.

Anmerkung: Die betrachtete Funktion ist im Intervall $I = [0; b]$ streng monoton zunehmend.

Idee: Das Intervall $[0; b]$ wird in n äquidistante Teilintervalle der Länge $h = \Delta x = \frac{b}{n}$ zerlegt. Dann werden über jedem Teilintervall $[x_\nu; x_{\nu+1}]$ Rechtecke mit der Höhe $f(x_\nu)$ errichtet. Auf diese Weise entsteht eine Treppenfigur, deren Flächeninhalt kleiner als die gesuchte Fläche ist (Untersumme U_n). Entsprechend entsteht mit den Höhen

$f(x_{\nu+1})$ eine Treppenfigur, deren Flächeninhalt größer als die gesuchte Fläche ist (Obersumme O_n).

Prinzipskizze:



Obersumme und Untersumme lassen sich leicht berechnen (Rechtecksflächen!):

$U_n = h \cdot f(0) + h \cdot f(h) + h \cdot f(2h) + ... + h \cdot f(i \cdot h) + ... + h \cdot f((n-1) \cdot h) =$
$= 0 + h \cdot h^2 + h \cdot 4h^2 + h \cdot 9h^2 + ... + h \cdot i^2 \cdot h^2 + ... + h \cdot (n-1)^2 \cdot h^2 =$
$= h^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + i^2 + (n-1)^2) = h^3 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i^2$

Für die Obersumme folgt analog
$O_n = h \cdot f(h) + h \cdot f(2h) + h \cdot f(3h) + ... + h \cdot f((i+1) \cdot h) + ... + h \cdot f(n \cdot h) =$
$= h \cdot h^2 + h \cdot 4h^2 + h \cdot 9h^2 + ... + h \cdot (i+1)^2 \cdot h^2 + ... + h \cdot n^2 \cdot h^2 =$
$= h^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + i^2 + n^2) = h^3 \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2$

Aus der Formelsammlung entnimmt man für den Summenwert einer derartigen Potenzreihe
$1^2 + 2^{2+} ... + i^2 + ... + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$.

Für die Obersumme folgt daraus unter Berücksichtigung von $h = \frac{b}{n}$
$O_n = (\frac{b}{n})^3 \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = \frac{b^3}{6} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{n \cdot n \cdot n} = \frac{b^3}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n}$
bzw.
$O_n = \frac{b^3}{6} \cdot (1 + \frac{1}{n}) \cdot (2 + \frac{1}{n})$.

Bei der Berechnung der Untersumme U_n ist zu berücksichtigen, dass sich die Summe nur bis zum letzten Summanden $(n-1)^2$ erstreckt. Dann liefert die Summenformel für Potenzreihen
$1^2 + 2^{2+} ... + i^2 + ... + (n-1)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6}$.
Dies wirkt sich folgendermaßen auf die Untersumme aus:
$U_n = (\frac{b}{n})^3 \cdot \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} = \frac{b^3}{6} \cdot \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{n \cdot n \cdot n} = \frac{b^3}{6} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{2n-1}{n}$
bzw.

$U_n = \frac{b^3}{6} \cdot (1 - \frac{1}{n}) \cdot (2 - \frac{1}{n})$.

Vergrößert man die Streifenzahl n, dann ist leicht zu erkennen, dass
1. $O_n > U_n$ für jedes n,
2. die Untersumme zu-, die Obersumme abnimmt,
3. die Intervalle $[U_n; O_n]$ eine Intervallschachtelung bilden und damit eine reelle Zahl eindeutig bestimmen.

Ober- und Untersumme streben also gegen einen gemeinsamen Grenzwert, den man Maßzahl des Flächeninhalt A nennt:

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{b^3}{6} \cdot (1 + \frac{1}{n}) \cdot (2 + \frac{1}{n})\right] = \frac{b^3}{6} \lim_{n\to\infty} [(1 + \frac{1}{n}) \cdot (2 + \frac{1}{n})] = \frac{b^3}{6} \cdot 2 = \frac{b^3}{3}$$
$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{b^3}{6} \cdot (1 - \frac{1}{n}) \cdot (2 - \frac{1}{n})\right] = \frac{b^3}{6} \lim_{n\to\infty} [(1 - \frac{1}{n}) \cdot (2 - \frac{1}{n})] = \frac{b^3}{6} \cdot 2 = \frac{b^3}{3}.$$

Verallgemeinerung, Definition des bestimmten Integrals

Bisher wurden einige Einschränkung in Bezug auf die betrachtete Funktion gemacht. Diese dürfen jedoch (ohne Beweis) weitgehend fallen gelassen werden:

1. Wenn der Inhalt des Flächenstücks zwischen x-Achse, den Geraden mit $x = a$ und $x = b$ $(0 \leq a < b)$ und der x-Achse berechnet werden soll, dann folgt sofort $A = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$.
2. Allgemein lässt sich z. B. die Obersumme einer monoton zunehmenden Funktion in den Grenzen $a = x_0$ und $b = x_n = x_0 + n\cdot\Delta x$ bei äquidistanter Teilung des Intervalls $I = [a; b]$ in Teilintervalle $h = \Delta x = \frac{b-a}{n}$ so schreiben:
$O_n = (x_0+\Delta x)\cdot\Delta x + (x_0+2\cdot\Delta x)\cdot\Delta x + ... + (x_0+i\cdot\Delta x)\cdot\Delta x + ... + (x_0+n\cdot\Delta x)\cdot\Delta x =$
$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x = \sum_{i=1}^{n} [f(x_0 + i \cdot \Delta x) \cdot \Delta x] = \Delta x \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_0 + i \cdot \Delta x)$.
3. Es lässt sich zeigen, dass für die untersuchte Funktion bei jeder beliebigen (also auch nicht äquidistanten) Zerlegung des Intervalls $I = [a; b] \subseteq D_f$ gilt:
$\lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} U_n$.
4. Auch für nicht monotone, aber stetige Funktionen gilt $\lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} U_n$.

Definition: Es sei $f: x \to f(x)$ eine Funktion mit $x \in D_f$., $I = [a; b] \subseteq D_f$, $0 \leq a < b$ und $f \geq 0$ für alle $x \in I$ sowie zunächst f monoton zunehmend. Wenn der Grenzwert der Obersummen $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_0 + i \cdot \Delta x) \cdot \Delta x] = \lim_{n\to\infty} \left[\Delta x \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_0 + i \cdot \Delta x)\right]$ existiert und mit dem Grenzwert der Untersummen übereinstimmt, dann heißt f über [a; b] integrierbar. Der gemeinsame Grenzwert heißt Flächeninhalt des Kurvenstücks von über [a; b]. Der Summengrenzwert heißt Integral.

Schreibweise:
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x = \int_a^b (f(x) \cdot dx) = \int_a^b f(x)dx$$
Bedeutung:
$\int$ heißt Integralzeichen,
f(x) heißt Integrand,

x ist die Integrationsvariable,
a und b sind die Integrationsgrenzen,
dx heißt Integrationsdifferential.

Anmerkung:
Ohne Beweis: Alle stetigen Funktionen sind integrierbar. Da alle differenzierbaren - Funktion stetig sind, sind sie integrierbar:
Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit $\Rightarrow$ Integrierbarkeit.
Zum Beispiel sind alle ganzrationalen Funktionen differenzierbar, also auch integrierbar.

Rechenregeln für bestimmte Integrale

Aus der Definition des bestimmten Integrals über die Summengrenzwertformel

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_0 + i \cdot \Delta x) \cdot \Delta x] = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x\right] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) \cdot \tfrac{b-a}{n}]$$

mit Δx = b - a (für b > a folgt z. B. Δx > 0)
folgt unmittelbar, dass das Integral sein Vorzeichen ändert, wenn die Integralgrenzen a und b vertauscht werden, d. h.

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

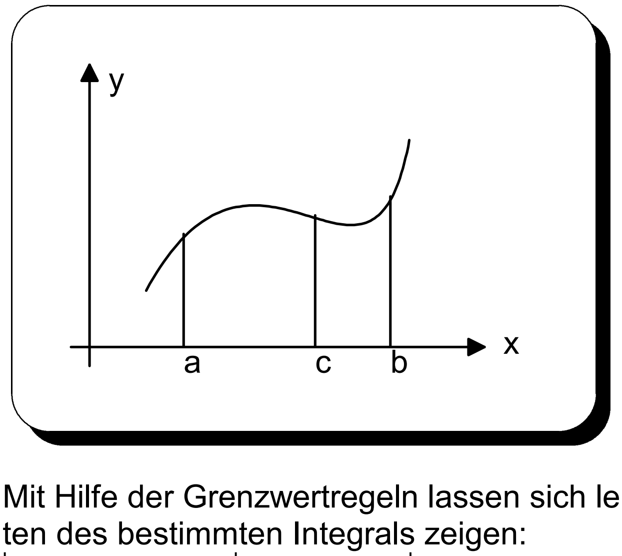
Aus der Anschauung folgt weiter sofort

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

und

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Skizze:



Mit Hilfe der Grenzwertregeln lassen sich leicht auch die sog. Linearitätseigenschaften des bestimmten Integrals zeigen:

$$\int_a^b [C \cdot f(x)]dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx \text{ und } \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Beweis:

$$\int_a^b [C \cdot f(x)]dx = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^n [C \cdot f(x_i)] \cdot \Delta x\right] = ... = C \cdot \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x\right] = C \cdot \int_a^b f(x)dx$$

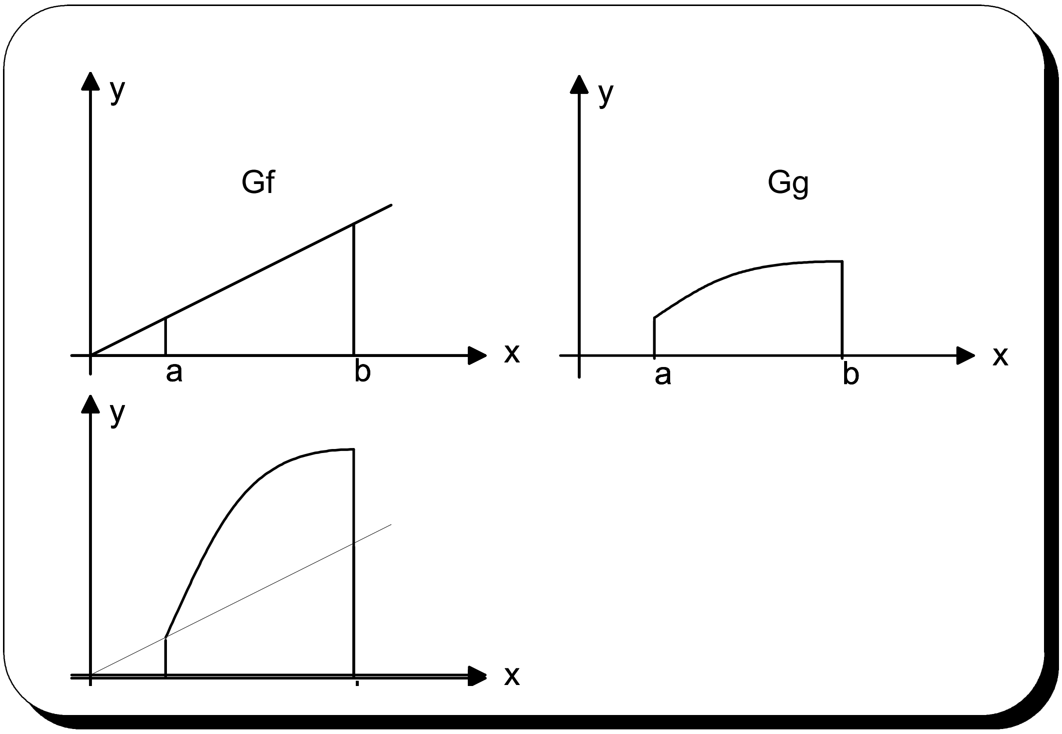
bzw.

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^n [f(x_i) + g(x)] \cdot \Delta x\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^n [f(x_i) \cdot \Delta x] + \sum_{i=1}^n [g(x) \cdot \Delta x]\right] =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n [f(x_i) \cdot \Delta x] + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n [g(x) \cdot \Delta x] = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Die letzten Eigenschaften lassen sich so formulieren:

1. Ein konstanter Faktor kann vor das Integral gezogen werden.
2. Das Integral einer Summe von integrierbaren Funktionen ist gleich der Summe der Integrale der einzelnen Funktionen.

Skizze:



Anwendungsbeispiele

Grundlagen:

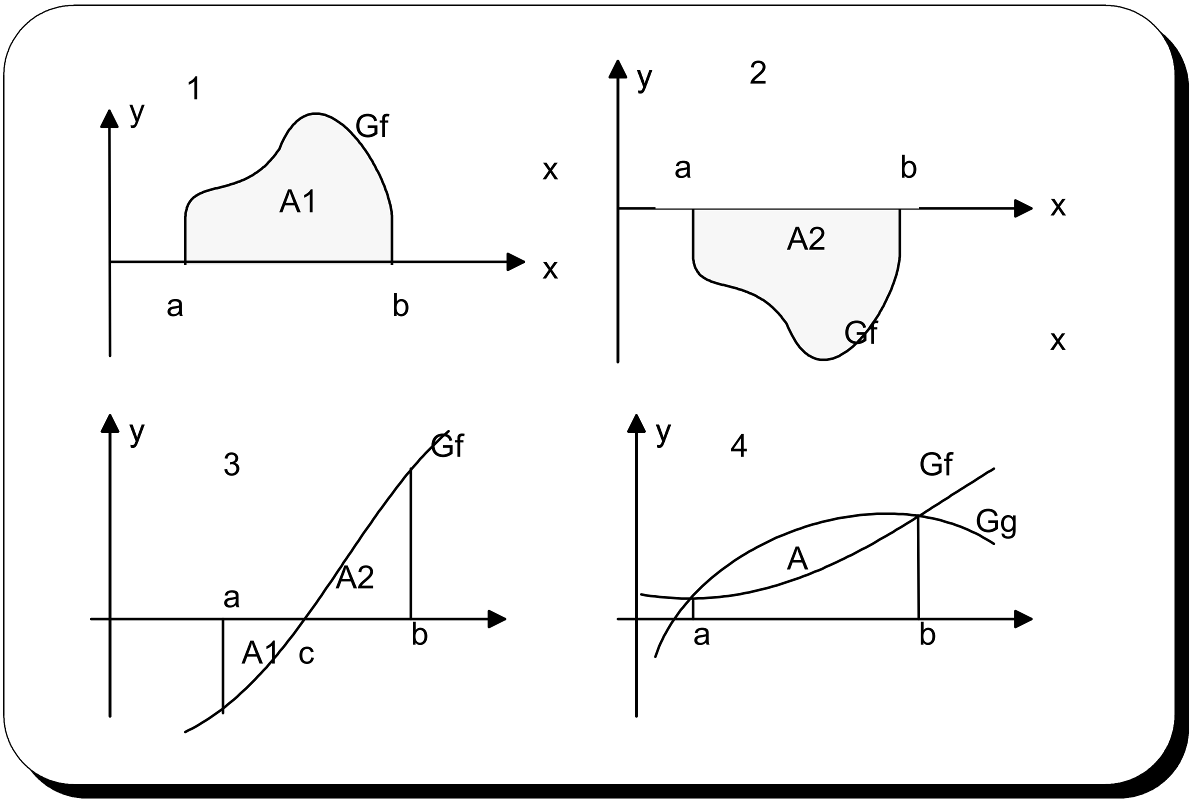
$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$, $\int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$ und $\int_a^b dx = b - a$

1. $\int_3^4 (5 \cdot x^2)dx = 5 \cdot \int_3^4 x^2 dx = 5 \cdot \left(\frac{4^3}{3} - \frac{3^3}{3}\right) = 5 \cdot \left(\frac{64}{3} - \frac{27}{3}\right) = 5 \cdot \frac{37}{3}$
2. $\int_a^b [5 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 2]dx = 5 \cdot \left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right) - 3 \cdot \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) + 2 \cdot (b - a)$

Bestimmtes Integral und Flächeninhalt

Die vorher begründeten Eigenschaften des bestimmten Integrals liefern folgende Folgerungen für Flächeninhalte (vgl. Skizzen!):

Skizzen:



Zwischen den Flächeninhalten A, A_1 und A_2 aus den obigen Skizzen und den zugehörigen Integralen bestehen folgende offensichtlichen Zusammenhänge:

Bild 1: $A_1 = \int_a^b f(x)dx$

Bild 2: $A_2 = -\int_a^b f(x)dx \int_a^b |f(x)|dx$

Bild 3: $A = A_2 + A_1 = \int_c^b f(x)dx - \int_a^c f(x)dx = \int_c^b f(x)dx + \int_a^c |f(x)|dx = \int_a^b |f(x)|dx$

Bild 4: $A = |\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx| = |\int_a^b [f(x) - g(x)]dx|$

Allgemein lässt sich zeigen, dass für den Inhalt einer von zwei Graphen eingeschlossen Fläche mit den Schnittpunkten an den Stellen a und b gilt:

$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx.$

Funktion und Stammfunktion

Die bisherigen Beispiele ließen bereits darauf schließen, dass zwischen der Integrandenfunktion f(x) und dem Funktionsterm, der das Integral beschreibt, ein enger Zusammenhang besteht, der mit der Ableitung zu tun hat.

Beispiele:

1. $\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$; die Ableitungsfunktion zu $f(x) = \frac{x^3}{3}$ ist $f'(x) = x^2$
2. Die Funktionen F_1: $x \to x^2$, F_2: $x \to x^2 + 1$ und F_3: $x \to x^2 - 17$ haben die gemeinsame Ableitungsfunktion $f(x) = F_1'(x) = F_2'(x) = F_3'(x) = 2x$.

Definition: Eine differenzierbare Funktion F heißt Stammfunktion einer Funktion f im gemeinsamen Definitionsbereich D, wenn dort F' = f gilt.

Beim Differenzieren einer Funktion fällt eine additive Konstante im Funktionsterm heraus. Daraus und mit der Definition der Stammfunktion folgen die folgenden Eigenschaften:

1. Ist F: $x \to F(x)$ eine Stammfunktion von f: $x \to f(x)$, so ist auch F_C: $x \to F(x) + C$ eine Stammfunktion von f.
2. Ist F: $x \to F(x)$ eine Stammfunktion von f: $x \to f(x)$, so stellt F_C: $x \to F(x) + C$ mit $C \in R$ die Menge aller Stammfunktionen von f: $x \to f(x)$ dar.
3. Die Differenz $F_1 - F_2$ zweier Stammfunktionen zur Funktion f ist eine in jedem Intervall $I \subset D$ konstante Funktion.

Anmerkungen:

1. Verschiedene Stammfunktionen F_1: $x \to F(x) + C_1$ und F_2: $x \to F(x) + C_2$ zu einer gegebenen Funktion f unterscheiden sich nur durch die Scharparameter C_1 und C_2. Ihre Graphen liegen deshalb übereinander und haben voneinander den Abstand $d = |C_1 - C_2|$.
2. Man bezeichnet die Menge aller Stammfunktionen F_C von fa auch als "unbestimmtes Integral" von f und schreibt $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Stammfunktionen gebräuchlicher Funktionen

Die Stammfunktionen der gebräuchlichsten Funktionen lassen sich leicht ermitteln:

$f: x \to c;\ F: x \to c \cdot x + C$

$f: x \to x;\ F: x \to \frac{x^2}{2} + C$

$f: x \to x^2;\ F: x \to \frac{x^3}{3} + C$

$f: x \to x^3;\ F: x \to \frac{x^4}{4} + C$

$f: x \to x^n;\ F: x \to \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \in R\backslash\{-1\})$

$f: x \to \sin x;\ F: x \to -\cos x + C$

$f: x \to \cos x;\ F: x \to \sin x + C$

Daraus folgt z. B. für die Funktion f: $x \to -3 \cdot x^4 + 5 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 2$ das unbestimmte Integral $F: x \to -\frac{3}{5} \cdot x^5 + \frac{5}{3} \cdot x^3 - 4 \cdot x^2 + 2 \cdot x + C$.

Die Integralfunktion

Erinnerung: Für alle a < b und a, b $\in$ R gilt

$F^* = \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3} \cdot (b^3 - a^3)$.

Dann stellt F* eine eindeutig bestimmte Zahl dar, die von a und b abhängt. Läßt man nun die untere Grenze a fest und fasst die obere Grenze b als Variable x aus [a; b] auf, dann können damit die Inhalte aller Flächen unter dem Graphen mit den Grenzen a (fest) und x = b (variabel) berechnet werden, und der Flächeninhalt ist von der oberen Integralgrenze abhängig. Damit die obere Grenze und die Integrationsvariable nicht zusammenfallen, wird üblicherweise eine kleine Umbenennung der Integrationsvariablen von x auf t vorgenommen:
$\int_a^x t^2 dt = \frac{x^3}{3} - \frac{a^3}{3}$.

Damit liegt die folgende Definition nahe:

> Def.: Es sei eine Funktion f in I integrierbar. Dann heißt jede in I definierte Funktion $F^*: x \to F^*(x) = \int_a^x f(t)dt$ mit $a \in I$ eine Integralfunktion von f in I.

Beispiel:
$F^*: x \to \int_2^x t^3 dt = \frac{x^4}{4} - \frac{2^4}{4} = \frac{x^4}{4} - \frac{16}{4} = \frac{x^4}{4} - 4$
ist Integralfunktion zu f: $x \to x^3$ mit der unteren Integralgrenze a = 2.

Weiter oben wurde bereits gezeigt, dass für jede Funktion f gilt:
$F^*(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$.
Dies bedeutet, dass jede Integralfunktion an der unteren Integralgrenze a eine Nullstelle hat.

Zusammenhang Stammfunktion - Integralfunktion

Beispiel: f: $x \to 3 \cdot x$
Behauptung: $F: x \to \frac{3}{2} \cdot x^2 + 4$ ist Stammfunktion, aber keine Integralfunktion zu f.
Beweis:
F'(x) = 3x = f(x), also ist F Stammfunktion von f.
Andererseits gilt für eine Stammfunktion I zu f:
$I = \int_a^x f(t)dt = \int_a^x 3t \cdot dt = \frac{3}{2} \cdot x^2 - \frac{3}{2} \cdot a^2$.
Wäre F eine Integralfunktion von f, dann müsste gelten:
F = I, d. h. $\frac{3}{2} \cdot x^2 + 4 = \frac{3}{2} \cdot x^2 - \frac{3}{2} \cdot a^2 \Rightarrow 4 = -\frac{3}{2} \cdot a^2 \Rightarrow a^2 = -\frac{8}{3}$.
Dies ist aber für keine reelle Zahl a möglich!

Dagegen ist die Integralfunktion I eine Stammfunktion:
I'(x) = 3·x = f(x)

Daraus folgt: Nicht jede Stammfunktion ist eine Integralfunktion! Die vorliegende Integralfunktion I ist aber eine Stammfunktion.

Im nächsten Abschnitt gezeigt werden, dass jede Integralfunktion eine Stammfunktion ist.

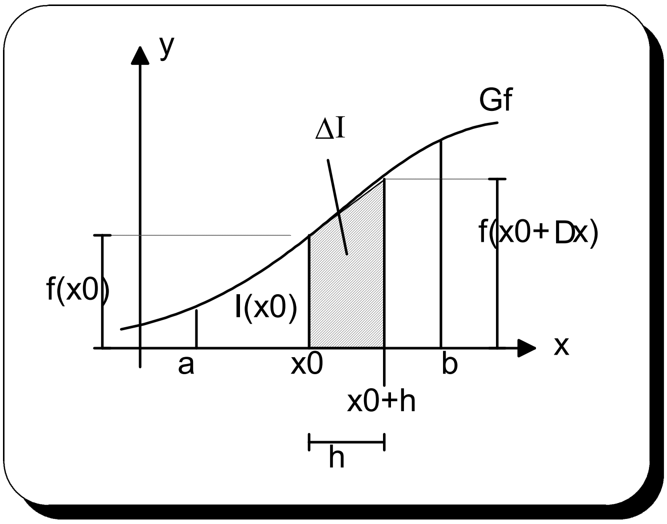
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Jede Integralfunktion I einer stetigen Funktion f ist differenzierbar, und ihre Ableitungsfunktion I' ist gleich der Integrandenfunktion f.
Kurzschreibweise: $I(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow I'(x) = f(x)$

Beweis für eine in [a; b] stetige und monoton zunehmende Funktion f:
Es sei x_0, $x_0+h \in [a; b]$ für $h > 0$.
Dann gilt für den Differenzenquotienten
$\frac{\Delta I}{\Delta x} = \frac{I(x_0+h)-I(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{I(x_0+h)-I(x_0)}{h}$.
Für ΔI gilt wegen der angenommenen Monotonie von f

$f(x_0) \cdot h \leq \Delta I \leq f(x_0 + h) \cdot h$
bzw.
$f(x_0) \leq \frac{\Delta I}{h} \leq f(x_0 + h)$.
Für die Grenzwerte gilt dann
$\lim_{h\to 0} f(x_0) \leq \lim_{h\to 0} \frac{\Delta I}{h} \leq \lim_{h\to 0} f(x_0 + h)$.
Wegen der Stetigkeit von f gilt
$\lim_{h\to 0} f(x_0) = \lim_{h\to 0} f(x_0 + h)$,
und daraus folgt unmittelbar
$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta I}{h} = f(x_0)$.

Skizze:



Es ist leicht einzusehen, dass für den linksseitigen Grenzwert des Differenzenquotienten dasselbe Ergebnis folgt, so dass gilt:
$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta I}{\pm h} = f(x_0)$;
I ist also eine Stammfunktion von f.

Mit ähnlichen Überlegungen lässt sich die Gültigkeit der obigen Beziehung auch für streng monoton abnehmende bzw. abschnittsweise monotone Funktionen, generell für alle stetigen Funktionen, gilt.

Damit ist gezeigt, dass jede Integralfunktion I einer stetigen Funktion f eine Stammfunktion von f ist.

Berechnung bestimmter Integrale mit Hilfe der Stammfunktion

Die Integralfunktion I(x) zu einer Funktion f gehört also zu den Stammfunktionen von f. Ist F(x) irgend eine solche Stammfunktion, so unterscheidet sie sich von I(x) nur durch einen konstanten Summanden.

Es besteht also die Beziehung

$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C.$

Die Konstante C lässt sich leicht berechnen; für x = a gilt nämlich

$\int_a^a f(t)dt = 0 \Rightarrow F(a) = C.$

Daraus folgt für F(x) zunächst

$F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a)$

bzw.

$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$

Für x = b erhält man dann

$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$

Dies lässt sich so formulieren:

Satz: Das bestimmte Integral einer stetigen Funktion f zwischen der unteren Grenze a und der oberen Grenze b ist gleich der Differenz F(b) - F(a) der Funktionswerte einer beliebigen Stammfunktion von f.

Schreibweise:

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$

Die bestimmte Integration läuft praktischerweise in folgenden Schritten ab:

1. Man sucht eine Stammfunktion F zur Funktion f.
2. Man bildet die Differenz F(b) - F(a).

Anmerkungen:

1. Das Aufsuchen einer Stammfunktion F zu einer Funktion f ist die Lösung der Frage, welche Funktion F die Ableitung F'(x) = f(x) hat.
2. Schreibt man zu einer Stammfunktion F(x) noch eine Konstante C hinzu, dann fällt diese bei der Bildung der Differenz F(b) - F(a) heraus. Sie kann deshalb von vorneherein weggelassen werden.

Anwendung der Integralrechnung auf Flächenberechnungen

1. Beispiel: $\int\limits_1^2 x^4 dx$

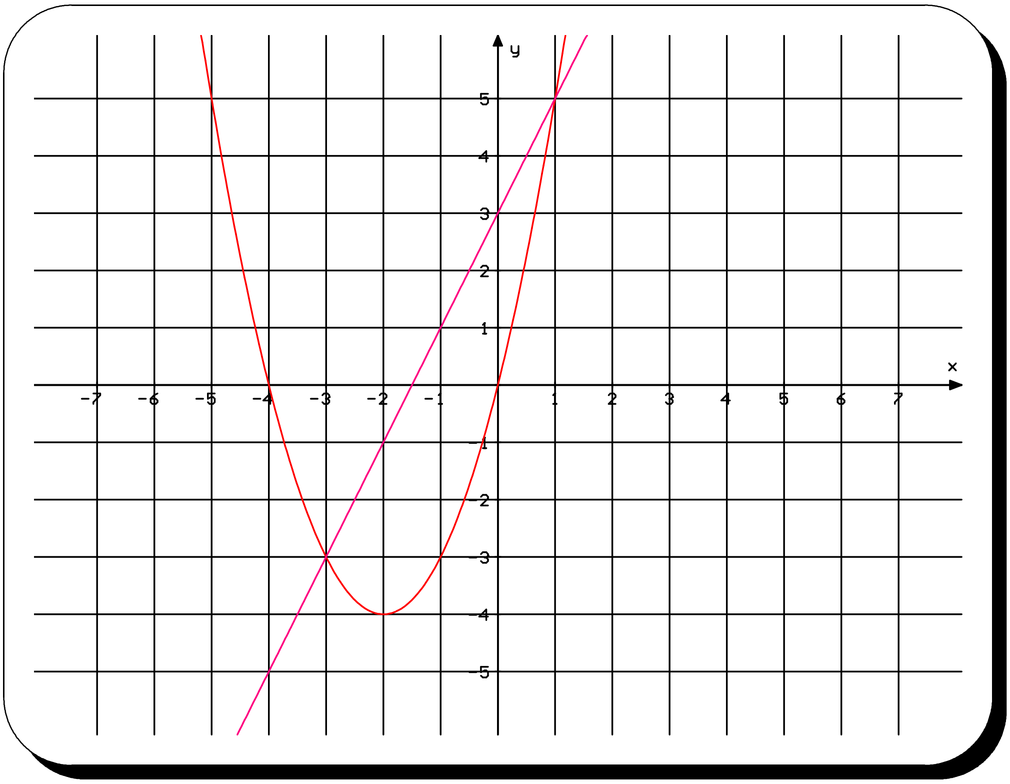
Eine Stammfunktion von f ist $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$, weil $\left(\frac{x^5}{5} + C\right)' = x^4$

$\int\limits_1^2 x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 = \frac{2^5}{5} - \frac{1^5}{5} = \frac{32}{5} - \frac{1}{5} = \frac{31}{5} = 6{,}2.$

2. Beispiel: Es ist der Inhalt A der Fläche zu berechnen, die von den Graphen der Funktionen f: $x \to x^2 + 4\cdot x$ und g: $\to 2\cdot x + 3$ begrenzt wird.
Lösung:
Die Integralgrenzen werden von den x-Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Graphen gebildet:
$x^2 + 4\cdot x = 2\cdot x + 3$
$x^2 + 2\cdot x - 3 = 0$
$(x + 3)\cdot(x - 1) = 0$
$x = -3 \vee x = 1$

$A = \left|\int\limits_{-3}^{1}(f(x) - g(x))dx\right| = \left|\int\limits_{-3}^{1}(x^2 + 2\cdot x - 3)dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} + 2\cdot\frac{x^2}{2} - 3\cdot x\right]_{-3}^{1}\right| =$
$= \left|\left(\frac{1^3}{3} + 2\cdot\frac{1^2}{2} - 3\cdot 1\right) - \left(\frac{(-3)^3}{3} + 2\cdot\frac{(-3)^2}{2} - 3\cdot(-3)\right)\right| = |(\frac{1}{3} + 1 - 3) - (-9 + 9 + 9)| =$
$= \left|-\frac{5}{3} - 9\right| = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}.$

Graphen:



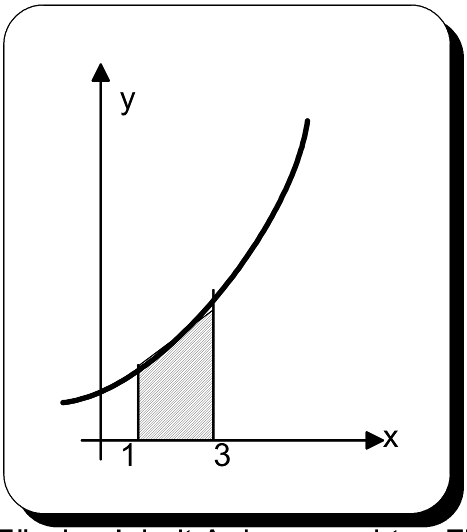
3. Beispiel: Es ist der Inhalt der Fläche zu berechnen, die von den Graphen zu $f: x \to x^3 - x - 1$ und $g: x \to 2\cdot x^2 - 3$ eingeschlossen wird.

Lösung:
Die x-Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Graphen (Integralgrenzen) ergeben sich aus
$x^3 - x - 1 = 2 \cdot x^2 - 3$
zu x = -1, x = 1 und x = 2.
Für den Flächeninhalt folgt daraus

$$A = \left|\int_{-1}^{1}(f(x)-g(x))dx\right| + \left|\int_{1}^{2}(f(x)-g(x))dx\right| =$$
$$= \left|\int_{-1}^{1}(x^3 - 2\cdot x^2 - x + 2)dx\right| + \left|\int_{1}^{2}(x^3 - 2\cdot x^2 - x + 2)dx\right| =$$
$$= \left[\tfrac{x^4}{4} - \tfrac{2}{3}\cdot x^3 - \tfrac{x^2}{2} + 2\cdot x\right]_{-1}^{1} + \left[\tfrac{x^4}{4} - \tfrac{2}{3}\cdot x^3 - \tfrac{x^2}{2} + 2\cdot x\right]_{1}^{2} =$$
$$= |(\tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{2} + 2) - (\tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{2} - 2)| + |(\tfrac{16}{4} - \tfrac{8}{3} - \tfrac{4}{2} + 4) - (\tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{2} + 2)| =$$
$$= \left|-\tfrac{4}{3} + 4\right| + \left|\tfrac{15}{4} - \tfrac{6}{3} - \tfrac{3}{2} + 2\right| = \left|\tfrac{8}{3}\right| + \left|-\tfrac{5}{12}\right| = 3\tfrac{1}{12} = 3,08.$$

4. Beispiel: Gegeben ist die Funktionenschar f_a: $x \to (x-a)^2 + 1$ mit dem Scharparameter $-2 \leq a \leq 3$. Der Wert von a ist so zu bestimmen, dass das von der zugehörigen Bildkurve, der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen x = 1 und x = 3 eingeschlossene Flächenstück den Inhalt $A = \frac{62}{3}$ FE hat. Ferner soll berechnet werden, für welches a der Inhalt extrem wird (welches Extremum) und wie groß der extreme Flächeninhalt ist. Außerdem soll der Funktionsgraph für a = -1 gezeichnet werden.

Lösung:
Prinzipskizze:



Für den Inhalt A der gesuchten Fläche in Abhängigkeit von a erhält man

$$A = \left|\int_{1}^{3} f(x)dx\right| = \left|\int_{1}^{3}(x^2 - 2\cdot a\cdot x + a^2 + 1)dx\right| = \left|\left[\tfrac{1}{3}\cdot x^3 - a\cdot x^2 + a^2\cdot x + x\right]_{1}^{3}\right| =$$
$$|(\tfrac{1}{3}\cdot 3^3 - a\cdot 3^2 + a^2\cdot 3 + 3) - (\tfrac{1}{3}\cdot 1^3 - a\cdot 1^2 + a^2\cdot 1 + 1)| =$$
$$|(9 - 9\cdot a + 3\cdot a^2 + 3) - (\tfrac{1}{3} - a + a^2 + 1)| = \left|12 - 9\cdot a + 3\cdot a^2 - \tfrac{1}{3} + a - a^2 - 1\right| =$$
$$\left|2\cdot a^2 - 8\cdot a + \tfrac{32}{3}\right| = 2\cdot a^2 - 8\cdot a + \tfrac{32}{3}$$

Wenn der Flächeninhalt den oben angegebenen Wert haben soll, muss gelten:
$$2\cdot a^2 - 8\cdot a + \tfrac{32}{3} = \tfrac{62}{3} \Leftrightarrow 2\cdot a^2 - 8\cdot a - \tfrac{30}{3} = 0 \Leftrightarrow a^2 - 4\cdot a - 5 = 0$$
Daraus folgt
$(a-5) \cdot (a+1) = 0$
bzw.

$a = -1$ ($\wedge$ $a = 5$) (Vorgabe!)

Der Flächeninhalt wird extrem für $A'(a) = 0 \wedge A''(a) <> 0$:
$A'(a) = 4 \cdot a - 8$
$A''(a) = 4 > 0$
$A'(a) = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot a - 8 = 0 \Leftrightarrow a = 2$
Für $a = 2$ gilt $A''(2) = 4 > 0$
Für $a = 2$ hat also der Flächeninhalt A ein Minimum;
$A_{min} = A(2) = (2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + \frac{32}{3})FE = (8 - 16 + \frac{32}{3}) = \frac{8}{3}FE.$