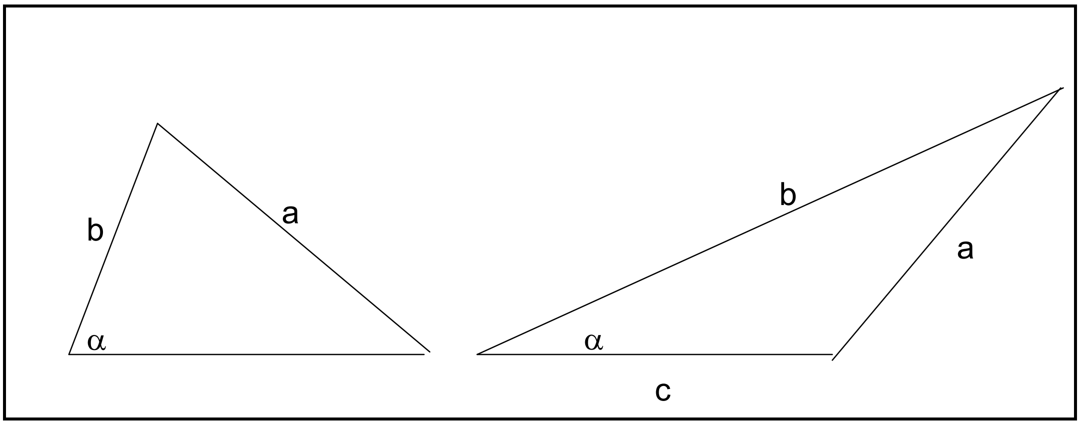
G1 Trigonometrie

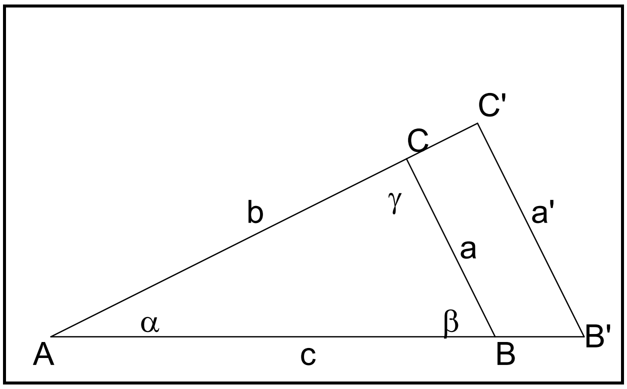
G1.1 Die trigonometrischen Grundfunktionen und ihre wichtigsten Eigenschaften

Seitenverhältnisse und Winkel in rechtwinkligen Dreiecken

Beispiel: Wenn in einem Dreieck ΔABC zum Beispiel die Seite a genau so groß ist wie die Seite c, dann kann man über die Gestalt des Dreiecks, insbesondere z. B. über den Winkel α, nichts aussagen (vgl. Skizzen).



Dagegen ist der Zusammenhang zwischen Winkeln und Seitenverhältnissen in rechtwinkligen Dreiecken eindeutig:



Die Dreiecke ABC und AB'C' sind ähnlich, d. h. sie stimmen paarweise in den Seitenverhältnissen und den entsprechenden Winkeln überein.

Man erkennt:

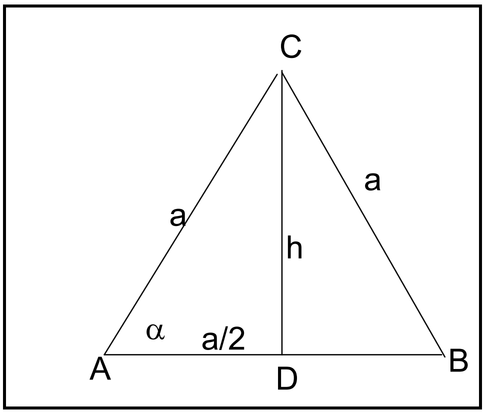
> In allen rechtwinkligen Dreiecken, die in einem spitzen Winkel übereinstimmen, sind die Verhältnisse entsprechender Seiten gleich.
> Der Wert eines Seitenverhältnisses kennzeichnet den zugehörigen Winkel und umgekehrt.

Anmerkung: Zur Unterscheidung der beiden Katheten heißt die Kathete a in Bezug auf den Winkel α Gegenkathete, b heißt Ankathete. Die dem rechten Winkel (hier γ) gegenüber liegende Seite ist die Hypotenuse.

Diese Seitenverhältnisse haben besondere Namen:

$$\text{Sinus } \alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}; \quad \sin\alpha = \frac{a}{c}$$
$$\text{Kosinus } \alpha = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}; \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$
$$\text{Tangens } \alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}; \quad \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \sin\alpha : \cos\alpha$$

Für besondere Winkel lassen sich die Werte der trigonometrischen Werte elementargeometrisch berechnen. Exemplarisch sei der Winkel α = 60° gegeben, der entsteht, wenn ein gleichseitiges Dreieck halbiert wird.



Im rechtwinkligen Teildreieck ADC mit dem Winkel α gilt $h^2 = a^2 - (\frac{a}{2})^2 \Rightarrow h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.
Daraus folgt unmittelbar:
$\sin 60° = \frac{h}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos 60° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$, $\tan 60° = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$

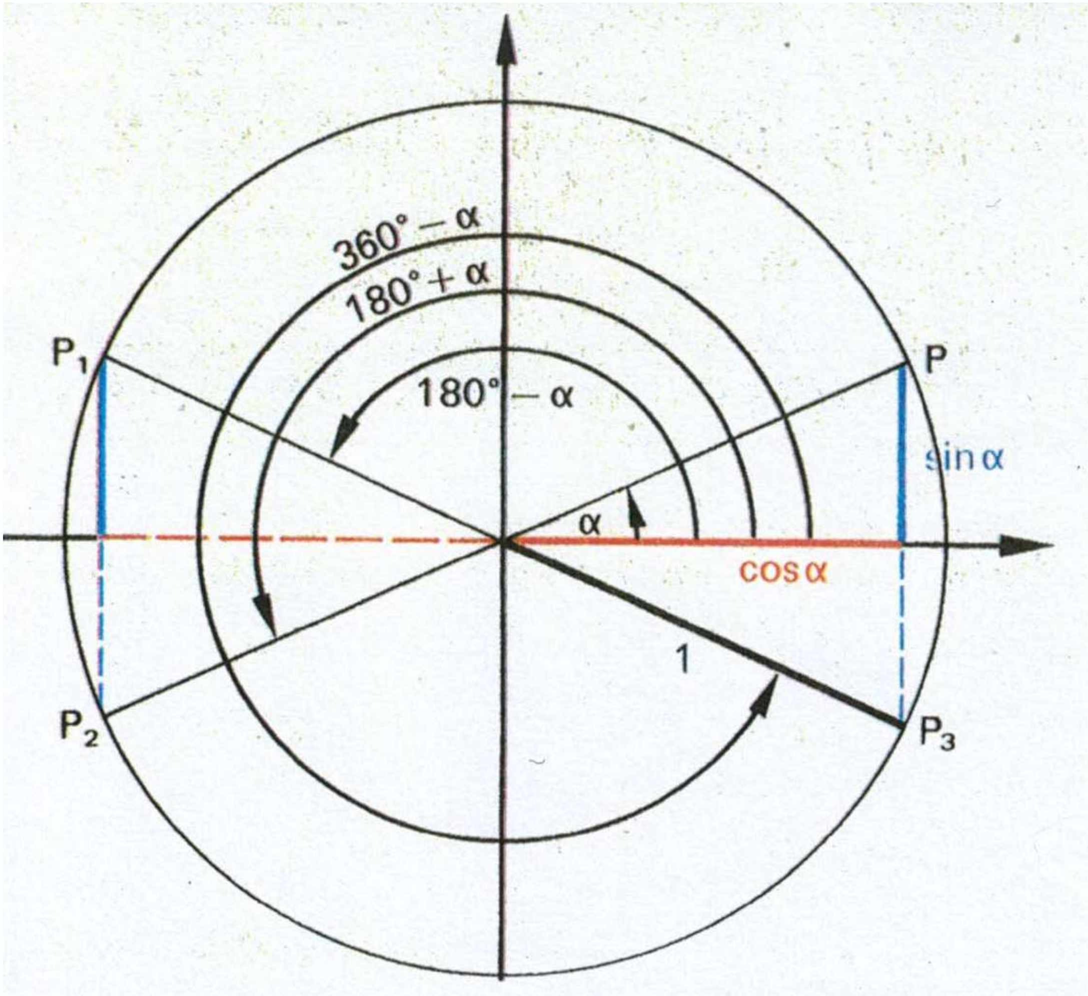
Winkelfunktionen am Einheitskreis

Erkennbar sind die Winkelfunktionen sin, cos und tan im rechtwinkligen Dreieck nur für spitze Winkel erklärt.

Eine sinnvolle Erweiterung ist mit dem Hilfsmittel des “Einheitskreises” möglich. Dazu lässt man einen “Einheitspfeil” um den Koordinatenursprung rotieren und beobachtet die Koordinaten der Pfeilspitze. Die Definitionen der Winkelfunktionen werden dann wie folgt erweitert:

Definition: Ein Punkt P(x; y) mit dem Abstand r = 1 vom Koordinatenursprung hat die Koordinaten cos ϕ und sin ϕ, d. h. es gilt $x = \cos\varphi$ und $y = \sin\varphi$, wenn $x^2 + y^2 = 1$ gilt.

Veranschaulichung:



Damit ergeben sich unmittelbar folgende Vorzeichenregeln für die Winkelfunktionen in den einzelnen Quadranten, wenn zudem
$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
berücksichtigt wird:

Quadrant	I	II	III	IV
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-

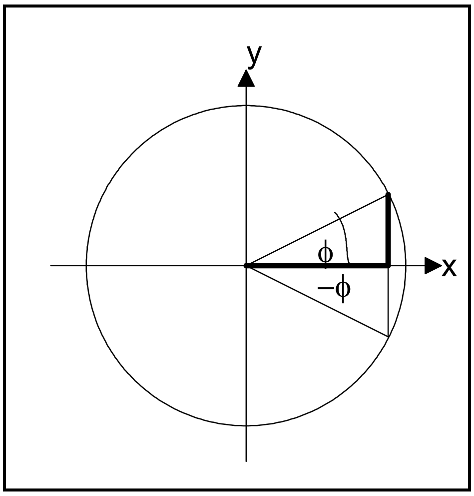
Aus Symmetriegründen folgt zudem für spitze Winkel:

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ $\quad$ $\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$ $\quad$ $\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ $\quad$ $\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$ $\quad$ $\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$

$\tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha$ $\quad$ $\tan(180° + \alpha) = \tan\alpha$ $\quad$ $\tan(360° - \alpha) = -\tan\alpha$

Mit den Überlegungen wie weiter oben lassen sich leicht auch Winkelfunktionen von negativen Winkeln und von Winkeln, die größer sind als 360°, definieren:



$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

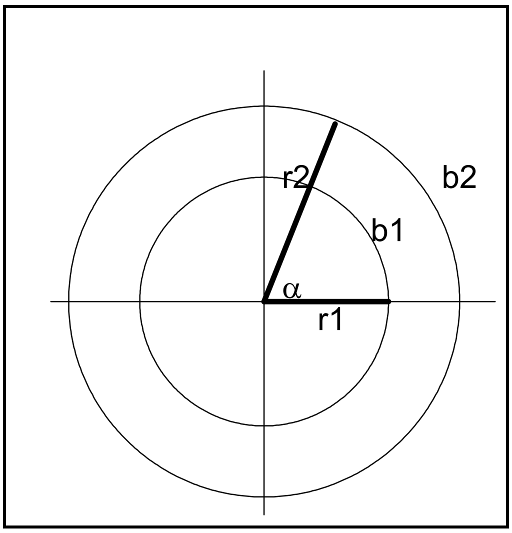
$\sin(k \cdot 360° + \alpha) = \sin\alpha$ $\cos(k \cdot 360° + \alpha) = \cos\alpha$ $\tan(k \cdot 360° + \alpha) = \tan\alpha$,
wenn k eine ganze Zahl ist.

Weitere Zusammenhänge:

$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$ $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$

Das Bogenmaß des Winkels

Winkel werden üblicherweise in ° (Grad) gemessen, bei dem ein rechter Winkel 90° misst, doch ist dies nicht das einzige Winkelmaß. So gibt es noch das Neugrad, bei dem ein rechter Winkel 100 (Neu-)Grad misst. In der Mathematik ist vor allem das Bogenmaß des Winkels von Bedeutung:



Zu einem gegebenen Winkel ist die Bogenlänge b proportional zum Radius r, andererseits ist bei festem Radius die Bogenlänge b proportional zum Winkel α. Dagegen ist der Quotient aus Bogenlänge b und Radius nur proportional zum Winkel α und eignet sich deshalb zur Beschreibung des Winkels.

> Definition: Der zu einem Winkel α gehörende Quotient aus Bogenlänge b und Radius r heißt Bogenmaß x des Winkels:
> $x = \frac{b}{r}$.

Zusammenhänge zwischen Grad- und Bogenmaß:

Zu einem Vollwinkel (360°) gehört eine Bogenlänge (= Kreisumfang) $b = 2r\pi$, also ein Winkel 2π, zum Winkel α = 1° also der 360. Teil und zum beliebigen Winkel α

$x = \frac{2\pi \cdot \alpha}{360^\circ}$ bzw. $\alpha = \frac{x \cdot 360^0}{2\pi}$.

Beispiele zu Gradmaßen und Bogenmaßen:

α im Gradmaß	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°		
x im Bogenmaß	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	2π		

Anmerkungen:

1. Das Bogenmaß ist also nichts anderes als die zu einem Winkel gehörende Bogenlänge im Einheitskreis.

2. Das Bogenmaß hat als Quotient zweier Längen keine Benennung; eine (künstliche) Benennung ist der Radiant (rad).

3. Die Winkeleinheit im Gradmaß ist 1°, die Einheit im Bogenmaß 1. Ein Vollwinkel (360°) misst im Bogenmaß $2\pi \approx 6$, so dass der Einheitswinkel 1 im Bogenmaß etwas weniger als 60° misst.

g1-1 erstellt am 01.04.2023