G1.2 Grundlegende Formeln; Sinus- und Kosinussatz; Winkel und Strecken in allgemeinen Dreiecken; Additionstheoreme

Berechnungen in rechtwinkligen Dreiecken

Wiederholung: Im rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C gelten die Beziehungen

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \sin\alpha : \cos\alpha$

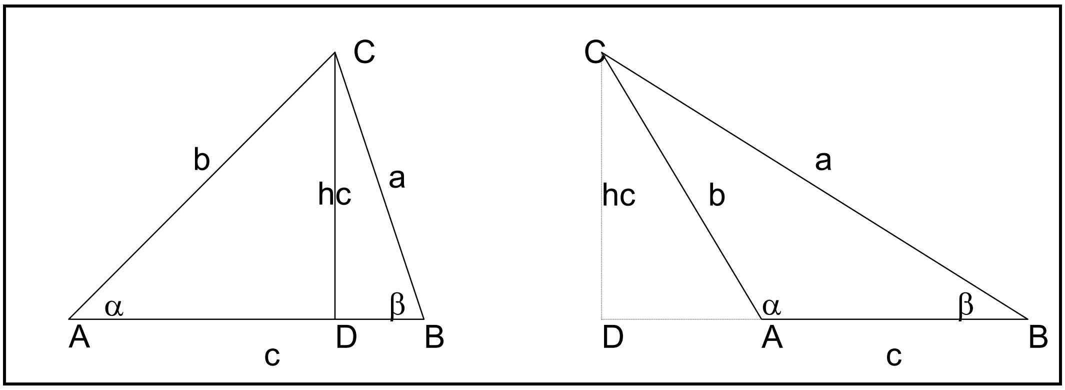
Daraus ergeben sich typische Aufgabenstellungen, wie sie im folgenden Beispiel dargestellt sind:

Beispiel: Im rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse c seien $\alpha = 50^\circ$ und c = 5 bekannt. Berechne a und β.

Lösung:
$\frac{a}{c} = \sin\alpha \Rightarrow a = c \cdot \sin\alpha = 5 \cdot \sin 50^\circ = 3{,}83$
$\cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{3{,}83}{5} = 0{,}77 \Rightarrow \beta = \operatorname{arc}(\cos 0{,}77) = 40^\circ$

Sinussatz

Die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus lassen sich auch in beliebigen Funktionen verwenden. Wenn man zum Beispiel in einem beliebigen Dreieck eine Höhe zeichnet, dann entstehen zwei rechtwinklige Teildreiecke.



Im linken (spitzwinkligen) Dreieck lässt sich die Höhe h_c leicht auf zwei verschiedene Arten ausdrücken:

$\frac{h_c}{b} = \sin\alpha \Rightarrow h_c = b \cdot \sin\alpha$; $\frac{h_c}{a} = \sin\beta \Rightarrow h_c = a \cdot \sin\beta$

Im rechten (stumpfwinkligen) Dreieck folgt analog, wenn man die Beziehung

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$

beachtet,

$\frac{h_c}{b} = \sin(180° - \alpha) \Rightarrow h_c = b \cdot \sin(180^0 - \alpha) = b \cdot \sin\alpha$; $\frac{h_c}{a} = ... = \sin\beta \Rightarrow h_c = a \cdot \sin\beta$.

In beiden Fällen folgt also sofort

$b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta$ bzw. $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ bzw. $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$.

Es ist leicht nachzuweisen, dass, wenn man die Höhe h_a oder h_b einzeichnet, die analogen Formeln

$\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$ und $\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$

folgen. In Kurzform lässt sich sofort schreiben:

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

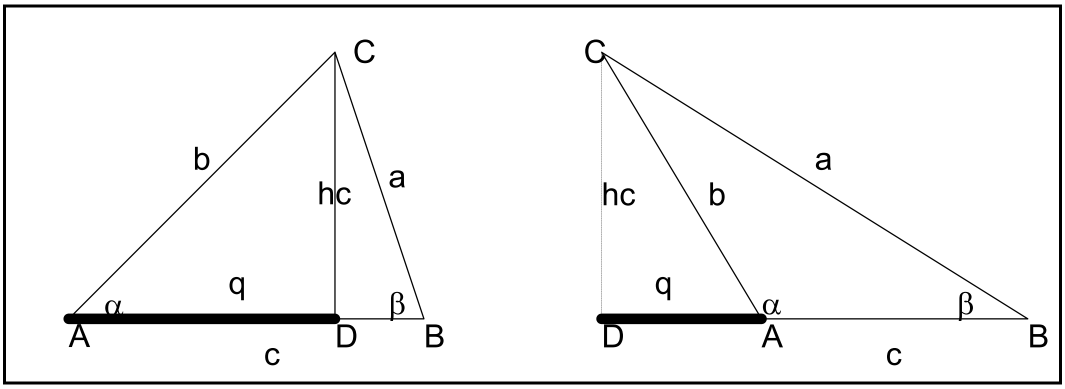
Diese Beziehung heißt Sinussatz; er lässt sich so formulieren:

Sinussatz: In jedem Dreieck verhalten sich die Längen zweier Seiten wie die Sinuswerte der gegenüber liegenden Winkel:
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

Beispiel: Im Dreieck ABC sind c = 5, α = 30° und β = 70° gegeben. Berechne die Seite a.

Lösung:
$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180^0 - (30^0 + 70^0) = 80^0$
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow a = c \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = 5 \cdot \frac{\sin 30^0}{\sin 80^0} = 2,53$

Kosinussatz



Im linken Dreieck gilt	Im rechten Dreieck gilt
$a^2 = h_c^2 + (c-q)^2 = h_c^2 + c^2 + q^2 - 2cq$	$a^2 = h_c^2 + (c+q)^2 = h_c^2 + c^2 + q^2 + 2cq$
$h_c = b \cdot \sin\alpha$	$h_c = b \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = b \cdot \sin\alpha$
$q = b \cdot \cos\alpha$	$q = b \cdot \cos(180^0 - \alpha) = -b \cdot \cos\alpha$

Durch Einsetzen in obige Gleichung erhält man in beiden Fällen

$$a^2 = h_c^2 + c^2 + q^2 - 2cq = b^2 \cdot (\sin\alpha)^2 + c^2 + b^2 \cdot (\cos\alpha)^2 - 2 \cdot c \cdot b \cdot (\cos\alpha) \Rightarrow$$

$$a^2 = b^2 \cdot \left[(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2\right] + c^2 - 2 \cdot c \cdot b \cdot (\cos\alpha) = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot (\cos\alpha)$$

Bei zyklischer Vertauschung der Seiten und Winkel erhält man insgesamt drei leicht zu merkende Formeln:

Kosinussatz: Das Quadrat der Länge einer Dreiecksseite ist gleich der Summe der Quadrate der Längen der anderen beiden Seiten, vermindert um das doppelte Produkt aus den Längen dieser Seiten und dem Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot (\cos\alpha)$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot (\cos\beta)$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot (\cos\gamma)$

Anmerkungen:

1. Wenn der Winkel im Kosinussatz 90° beträgt (dann ist der Kosinus dieses Winkels gleich Null!), dann geht der Kosinussatz in den Satz des Pythagoras über. Beispiel: $\gamma = 90^\circ \Rightarrow \cos\gamma = 0 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$

2. Wegen $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$ liefert der Sinussatz gelegentlich keine eindeutigen Ergebnisse, während wegen $\cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$ bei Verwendung des Kosinussatzes dieses Problem nicht auftritt! (Beispiele!)

Additionstheoreme

Es ist unmittelbar einzusehen, dass im Allgemeinen $\sin(\alpha + \beta) \neq \sin\alpha + \sin\beta$ ist. Für $\alpha = \beta = 30^\circ$ folgt zum Beispiel

$$\sin(30^0 + 30^\circ) = \sin 60^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \neq \sin 30^0 + \sin 30^\circ = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1.$$

Es lässt sich aber zum Beispiel $\sin(\alpha + \beta)$ durch Winkelfunktionen von α und β ausdrücken:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

Derartige Zusammenhänge zwischen Winkelfunktionen heißen Additionstheoreme. Die wichtigsten davon sind (ohne Beweis) in der beiliegenden Zusammenstellung aufgeführt.

B. Formeln

1. Zurückführung auf spitze Winkel

$90° < \varphi < 180°$: $\sin\varphi = \sin(180° - \varphi)$, $\quad \cos\varphi = -\cos(180° - \varphi)$
$\tan\varphi = -\tan(180° - \varphi)$, $\quad \cot\varphi = -\cot(180° - \varphi)$

$180° < \varphi < 270°$: $\sin\varphi = -\sin(\varphi - 180°)$, $\quad \cos\varphi = -\cos(\varphi - 180°)$
$\tan\varphi = \tan(\varphi - 180°)$, $\quad \cot\varphi = \cot(\varphi - 180°)$

$270° < \varphi < 360°$: $\sin\varphi = -\sin(360° - \varphi)$, $\quad \cos\varphi = \cos(360° - \varphi)$
$\tan\varphi = -\tan(360° - \varphi)$, $\quad \cot\varphi = -\cot(360° - \varphi)$

2. Funktionswerte negativer Winkel

$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi \qquad \cos(-\varphi) = \cos\varphi$
$\tan(-\varphi) = -\tan\varphi \qquad \cot(-\varphi) = -\cot\varphi$

3. Zusammenhang zwischen Funktion und Kofunktion

$\sin(90° - \varphi) = \cos\varphi \qquad \cos(90° - \varphi) = \sin\varphi$
$\tan(90° - \varphi) = \cot\varphi \qquad \cot(90° - \varphi) = \tan\varphi$

4. Beziehungen zwischen den Funktionswerten des gleichen Winkels

$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$;* (ohne Einschränkung) $\qquad \tan\varphi\cot\varphi = 1$ $(\varphi \neq k \cdot 90°)$

$$1 + \tan^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi} \quad (\varphi \neq (2k+1)\cdot 90°) \qquad 1 + \cot^2\varphi = \frac{1}{\sin^2\varphi} \quad (\varphi \neq k \cdot 180°)$$

5. Umrechnungsformeln für $0° < \varphi < 90°$

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \frac{\tan\varphi}{\sqrt{1 + \tan^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2\varphi}}$$

$$\cos\varphi = \sqrt{1 - \sin^2\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\varphi}} = \frac{\cot\varphi}{\sqrt{1 + \cot^2\varphi}}$$

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\varphi}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\varphi}}{\cos\varphi} = \frac{1}{\cot\varphi}$$

$$\cot\varphi = \frac{\sqrt{1 - \sin^2\varphi}}{\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1 - \cos^2\varphi}} = \frac{1}{\tan\varphi}$$

* $\sin^2\varphi$ ist eine Abkürzung für $(\sin\varphi)^2$. Besteht beim Hintereinanderschalten von Abbildungen Verwechslungsgefahr mit $\sin(\sin\varphi)$, so empfiehlt es sich, von der abgekürzten Schreibweise keinen Gebrauch zu machen.

6. Additionstheoreme

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

7. Funktionen des doppelten und halben Winkels

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha) \qquad 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos\alpha) \qquad 1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$$

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

8. Verwandlung einer Summe oder Differenz in ein Produkt

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

9. Verwandlung eines Produkts in eine Summe oder eine Differenz

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$$

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$$

(Quelle: Barth-Mühlbauer-Nikol-Wörle, Mathematische Formeln und Definitionen, BSV München, 3. Auflage 1978)