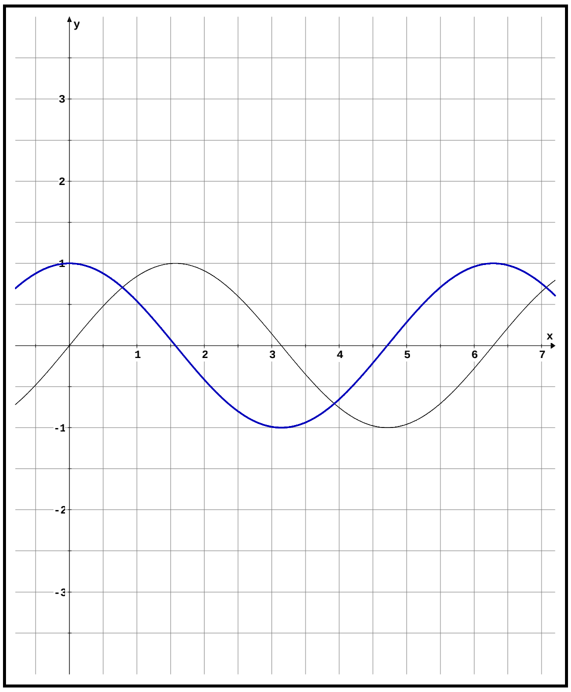
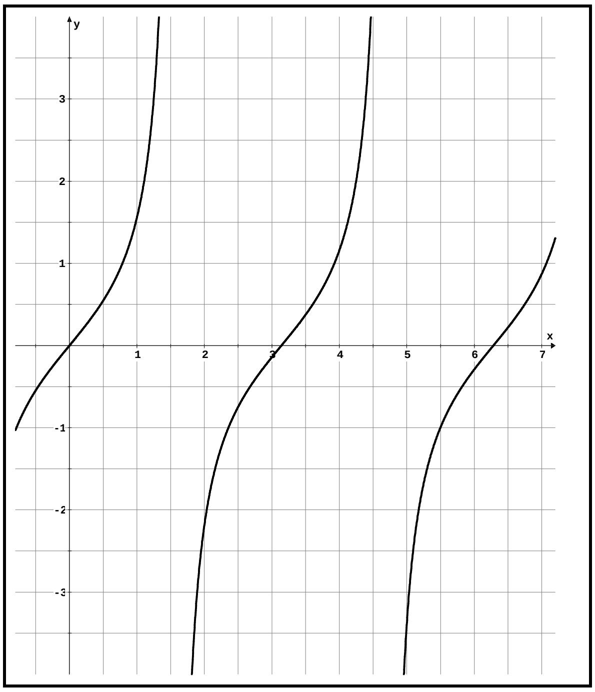
G1.3 Die Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktion; die allgemeine Sinusfunktion

Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktion

Durch f: y = sin(x), g: y = cos(x) und h: y = tan(x) sind reelle Funktionen für die Variable x (im Bogenmaß!) erklärt.

Diese Funktionen haben folgende Graphen:





Aus den Definitionen von Sinus, Kosinus und Tangens ($\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$) lassen sich unmittelbar folgend Grundeigenschaften angeben:

	sin(x)	cos(x)	tan(x)
Definitionsmenge	D = R	D = R	$D = R \backslash \{x \vert x = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}\}$
Wertemenge	W = [-1; +1]	W = [-1; +1]	W = R
Periodenlänge	$l = 2\pi$	$l = 2\pi$	$l = \pi$
Symmetrie	Punktsymm. bzgl. Ursprung	Achsensymm. bzgl. y-Achse	Punktsymmetrie bzgl. Ursprung

Diskussion der trigonometrischen Funktionen

Zur Diskussion der trigonometrischen Funktionen sind in üblicher Weise ($f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$) die Ableitungen zu bilden.

Für die Sinusfunktion gilt mit $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ (FS. S.39.8)

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sin x - \sin x_0}{x-x_0} = \frac{2\cos\frac{x+x_0}{2}\cdot\sin\frac{x-x_0}{2}}{x-x_0} = \cos\frac{x+x_0}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}$$

Mit den Grenzwertsätzen FS S. 55.2 (Der Grenzwert eines Produkts ist gleich dem Produkt der Grenzwerte der Faktoren) folgt daraus

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\left(\cos\frac{x+x_0}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\right) = \lim_{x\to x_0}\cos\frac{x+x_0}{2}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} = \left(\cos\frac{2\cdot x_0}{2}\right)\cdot 1 = \cos x_0$$

Es gilt also: $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$..

Analog lässt sich zeigen: $g(x) = \cos x \Rightarrow g'(x) = -\sin x$.

Die Ableitung der Tangensfunktion lässt sich sehr einfach mit der Quotientenregel

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$ (FS S. 61)

mit $u(x) = \sin x \Rightarrow u'(x) = \cos x$ und $v(x) = \cos x \Rightarrow v'(x) = -\sin x$ bilden:

$$h(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow h'(x) = \frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2+(\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

Dabei wurde FS S. 38.4 ($(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$) verwendet.

Es gilt also: $h(x) = \tan x \Rightarrow h'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$.

Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen lassen sich so zusammenfassen:

$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$f''(x) = -\sin x$
$g(x) = \cos x$	$g'(x) = -\sin x$	$g''(x) = -\cos x$
$h(x) = \tan x$	$h'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$	$h''(x) = \frac{2\cdot\tan x}{(\cos x)^2}$

Mit diesem mathematischen Rüstzeug lassen sich nunmehr die trigonometrischen Funktionen leicht diskutieren.

- Die Sinusfunktion f: y = sin (x):

Die Sinusfunktion hat an allen Stellen Extrema, an denen die zugehörige Kosinusfunktion Nullstellen hat. Diese liegen bei $x = (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$ mit ganzzahligen k.
Die Wendepunkte liegen in den Nullstellen der Funktion, also bei $x = k\cdot\pi$ mit ganzzahligen k, da dort auch die 2. Ableitung gleich Null ist (und die 3. Ableitung von Null verschieden ist).

- Die Kosinusfunktion f: y = cos (x):

Die Kosinusfunktion hat an allen Stellen Extrema, an denen die zugehörige Sinusfunktion Nullstellen hat. Diese liegen bei $x = k\cdot\pi$ mit ganzzahligen k.
Die Wendepunkte liegen in den Nullstellen der Funktion, also bei $x = k\cdot\pi$ mit ganzzahligen k, da dort auch die 2. Ableitung gleich Null ist (und die 3. Ableitung von Null verschieden ist).

v Die Tangensfunktion f: y = tan (x):
Die Tangensfunktion hat keine Extrema, da die erste Ableitung der Funktion an keiner Stelle den Wert Null annimmt.
Die Wendepunkte liegen in den Nullstellen der Funktion, also bei $x = k \cdot \pi$ mit ganzzahligen k, da dort auch die 2. Ableitung gleich Null ist (und (ohne Beweis) die 3. Ableitung von Null verschieden ist).

Die allgemeine Sinusfunktion f: y = a · sin(b·x + c) + d

In den folgenden Überlegungen soll unter der Funktion f immer die Standardfunktion $f: y = \sin x$ verstanden werden.

v Die Funktion $f_a : y = a \cdot \sin x$:
Der Faktor a beeinflusst die sog. Amplitude des Graphen: Der größte Funktionswert ist a.

v Die Funktion $f_b : y = \sin(b \cdot x)$:
Der Faktor b beeinflusst die Periodenlänge l: Es gilt $l = \frac{2\pi}{b}$.

Die Funktion $f_c : y = \sin(x + c)$:
Der Summand c verschiebt den Graphen von f um c gegen die positiv orientierte x-Achse.

Die Funktion $f_d : y = \sin(x) + d$:
Der Summand d verschiebt den Graphen von f um d in Richtung der positiv orientierten y-Achse.

Unten stehend sind Beispiele dargestellt: