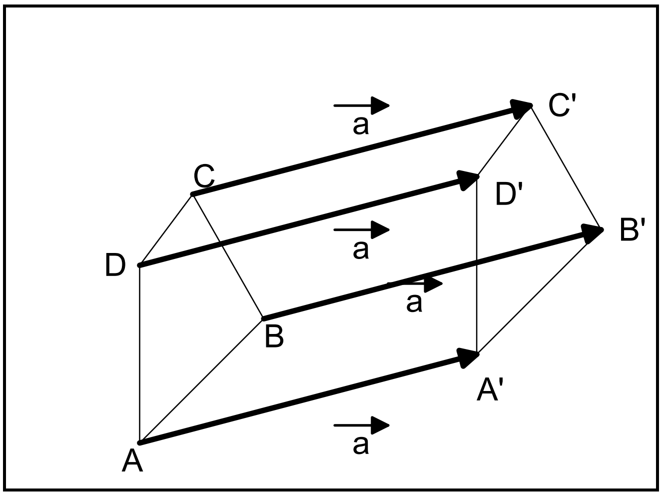
G2 Grundlagen der Vektorrechnung

G2.1 Die Vektorräume R^2 und R^3

Vektoren

Beispiel: Physikalische Größen wie Kraft und Geschwindigkeit werden nicht nur durch ihre Maßzahl und ihre Einheit, sondern auch durch ihre Richtung und Orientierung vollständig beschrieben, und man spricht vom “Kraftvektor” bzw. vom “Geschwindigkeitsvektor”. Dagegen ist zum Beispiel die Zeit kein Vektor, sondern eine skalare Größe.

Pfeile treten auch bei Verschiebungen auf (Verschiebungspfeile).



Alle Verschiebungspfeile $\vec{a}$ sind gleich lang, parallel und zeigen in dieselbe Richtung.

Daraus ergibt sich folgende

> Definition: Unter einem (Pfeil-)Vektor versteht man die Menge aller zu einem Pfeil gleichsinnig paralleler und gleich langer Pfeile (= parallelgleicher Pfeile).
> Ein einzelner Pfeil aus dieser Menge heißt Repräsentant dieses Vektors.

Anmerkungen:

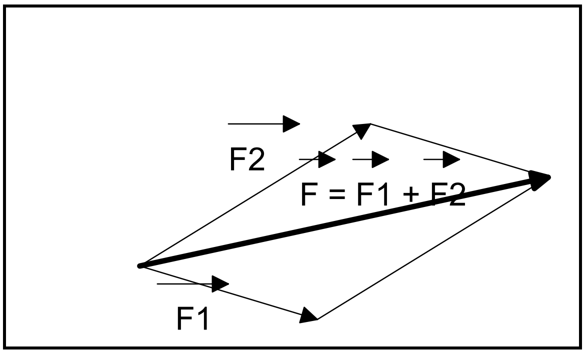
1. Man kann immer nur einen Repräsentanten eines Vektors zeichnen.
2. Die Darstellung eines Vektors ist unabhängig von der Wahl eines Repräsentanten.
3. Im oben erwähnten Sinn ist ein “Kraftvektor” kein Vektor!

Mit Hilfe der obigen Definition lässt sich die Gleichheit von Vektoren definieren:

Definition: Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann gleich, wenn zwei beliebige Repräsentanten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallelgleich sind.

Vektoraddition

Beispiel: Zwei Kräfte, die an einem Massenpunkt angreifen, können ersetzt werden durch die “Resultierende”, d. h. eine Ersatzkraft, die dieselbe Wirkung hervorruft wie die Einzelkräfte zusammen.



Analog ist die Addition von Vektoren erklärt:

Definition: Man wählt den Repräsentanten des Vektors $\vec{b}$ so, dass sein Fußpunkt mit der Spitze des Repräsentanten von $\vec{a}$ zusammenfällt und erhält als Repräsentanten von $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ den Pfeil, der vom Fußpunkt von $\vec{a}$ zur Spitze von $\vec{b}$ zeigt.

Beispiel: An einem Körper herrscht Gleichgewicht, wenn an ihm zwei gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kräfte angreifen. Dann ist die resultierende Kraft Null. Entsprechend definiert man:

Definition: Unter dem Gegenvektor $-\vec{a}$ eines Pfeilvektors $\vec{a}$ versteht man denjenigen Pfeilvektor, dessen Repräsentanten die gleiche Länge, aber die entgegengesetzte Richtung wie die Repräsentanten von $\vec{a}$ haben.
Der Nullvektor $\vec{0}$ hat die Länge Null und deshalb auch keine Richtung.
Für jeden Pfeilvektor $\vec{a}$ gilt: $\vec{a} + -\vec{a} = \vec{0}$ und $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Anmerkungen:
1. Der Nullvektor hat für die Vektoraddition eine ähnliche Bedeutung wie die Zahl Null für die Addition reeller Zahlen.
2. Der Nullvektor lässt sich zeichnerisch nicht darstellen.

Rechengesetze für die Vektoraddition

Aufgrund der freien Wahl des Repräsentanten eines Pfeilvektors lassen sich die Rechengesetze für die Vektoraddition geometrisch sehr leicht begründen.

Kommutativgesetz:
Für alle $\vec{a}, \vec{b} \in V$ gilt: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Assoziativgesetz:

Für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ gilt: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

Da auch bei der Vektoraddition die Klammern beliebig gesetzt werden dürfen, kann man sie auch weglassen:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

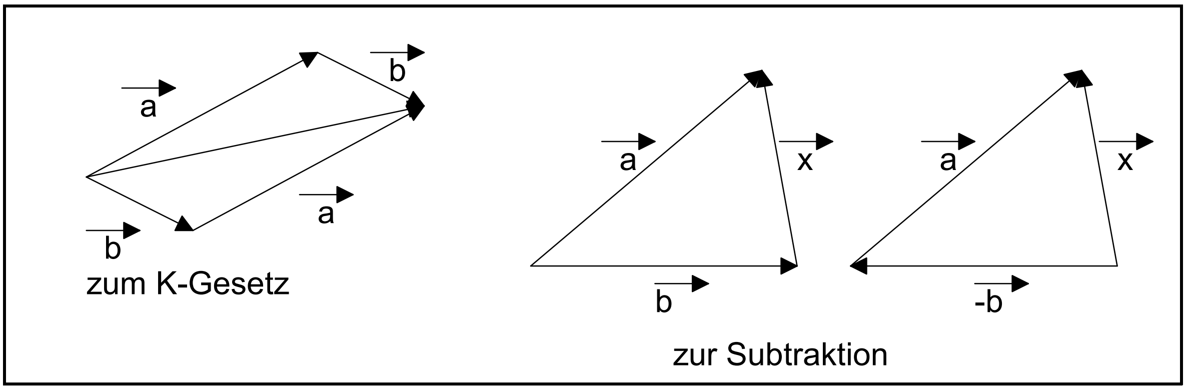
Nun lassen sich auch Gleichungen der Form $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$ lösen, denn die eindeutige Addtion von $-\vec{a}$ auf beiden Seiten der Gleichung führt auf

$$\left(-\vec{a}\right) + \vec{a} + \vec{x} = \left(-\vec{a}\right) + \vec{b} \Leftrightarrow \vec{0} + \vec{x} = \vec{b} + \left(-\vec{a}\right) = \vec{b} - \vec{a}$$

Dabei haben wir statt $\vec{b} + \left(-\vec{a}\right)$ vereinfacht $\vec{b} - \vec{a}$ geschrieben und sagen:

Ein Vektor wird subtrahiert, indem man seinen Gegenvektor addiert.

Veranschaulichung:



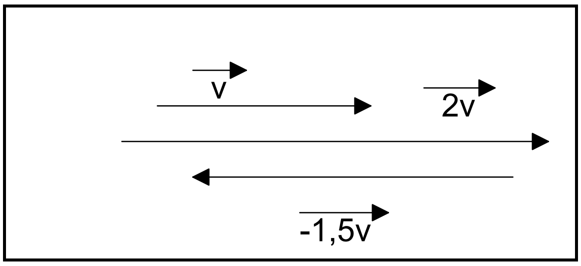
Skalare Multiplikation (S-Multiplikation)

Es soll wieder eine Kraft betrachtet werden, die an einem Massenpunkt angreift. Nach unseren Vorstellung versteht man, wenn eine doppelt so große Kraft in unveränderter Richtung angreifen soll, unter diesem neuen Kraftpfeil einen Pfeil in gleicher Richtung mit doppelter Länge, und schreibt dafür $\vec{F} + \vec{F} = 2 \cdot \vec{F}$.

Diese Überlegungen werden jetzt auf die Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl übertragen.

> Definition: Es sei k eine reelle Zahl und $\vec{v}$ ein Pfeilvektor.
> Dann hat der Vektor $k \cdot \vec{v}$ die |k|-fache Länge des Vektors $\vec{v}$.
> Für k > 0 haben $\vec{v}$ und $k \cdot \vec{v}$ dieselbe Richtung, für k < 0 haben $\vec{v}$ und $k \cdot \vec{v}$ entgegengesetzte Richtungen.

Beispiel:



Anmerkungen:

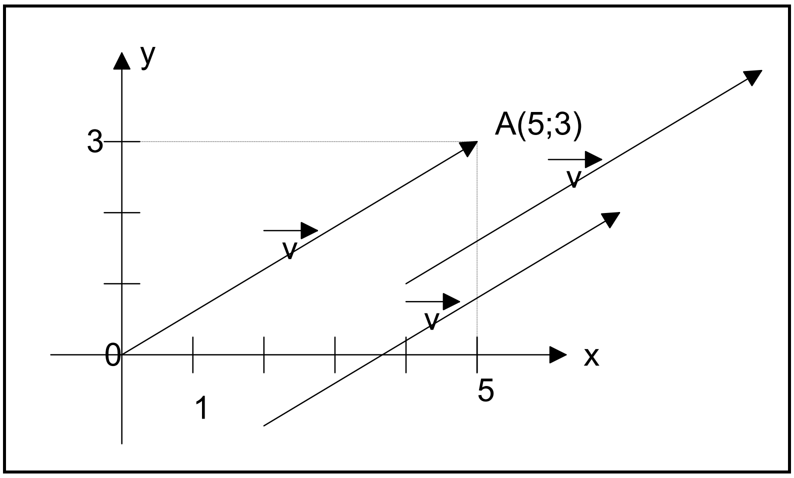
- Bei der S-Multiplikation handelt es sich im Gegensatz zur Vektoraddition um eine Verknüpfung von Elementen aus verschiedenen Mengen. Man bezeichnet eine solche Verknüpfung als äußere Verknüpfung.
- Es gelten (ohne Beweis) für die S-Multiplikation folgende Rechenregeln:
  gemischtes Assoziativgesetz: $r \cdot \left(s \cdot \vec{a}\right) = (r \cdot s) \cdot \vec{a}$
  S-Distributivgesetz: $(r + s) \cdot \vec{a} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{a}$
  V-Distributivgesetz: $r \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$
- Für das praktische Rechnen sind folgende Regeln von Bedeutung:
  $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$
  $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$
  $k \cdot \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow k = 0$ oder $\vec{a} = \vec{0}$
  $k \cdot \left(-\vec{a}\right) = (-k) \cdot \vec{a} = -k \cdot \vec{a}$

Koordinatendarstellung von Vektoren

Beispiel: In einem 2-dimensionalen Koordinatensystem sei ein Punkt A(5; 3) gegeben. Dann ist auch der Verschiebungspfeil $\vec{a}$ durch die Koordinaten eindeutig bestimmt. Der Verschiebungspfeil kann aber als Repräsentant eines Vektors $\overrightarrow{0A}$ aufgefasst werden, der seinen Anfangspunkt im Urspru320 ng des Koordinatensystems hat.

Ein solcher Vektor wird üblicherweise als Spaltenvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ geschrieben.

Veranschaulichung:



Die Komponenten des Vektors $\vec{v}$ geben an, um welche Werte ein Punkt vom Anfangspunkt in den jeweiligen Koordinatenrichtungen zu verschieben ist. In unserem Beispiel hat der Vektor $\vec{v}$ die Koordinatendarstellung bezüglich der gezeichneten orthonormierten Basis.

Punkt und Ortsvektor

Beispiel: Ein Repräsentant des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ entsteht sicher durch einen Vektor mit dem Anfangspunkt im Koordinatenursprung und dem Zielpunkt im Punkt A. Dieser Repräsentant heißt auch Ortsvektor von $\vec{v}$:

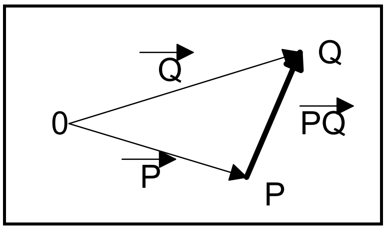
> Definition: Denjenigen Repräsentanten eines Vektors $\vec{a}$, der die Verschiebung des Koordinatenursprungs um $\vec{a}$ in den Punkt A veranschaulicht, bezeichnet man als den Ortsvektor $\vec{A}$ des Punktes A. Die Koordinaten von A stimmen mit den Komponenten des Ortsvektors $\vec{A}$ überein.

Im oben angegebenen Beispiel gilt: A(5; 3); $\vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Anmerkungen:

1. Bezüglich des Koodinatenusprungs O legt jeder Ortsvektor $\vec{A}$ genau den Punkt A im gewählten Koordinatensystem fest.

2. Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ kann leicht durch die Ortsvektoren $\vec{P}$ und $\vec{Q}$ ausgedrückt werden: $\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P}$.



Rechnen in Koordinaten

Die Zusammenhänge zwischen Punkten und Ortsvektoren lassen das Rechnen mit Ortsvektoren sehr einfach werden.

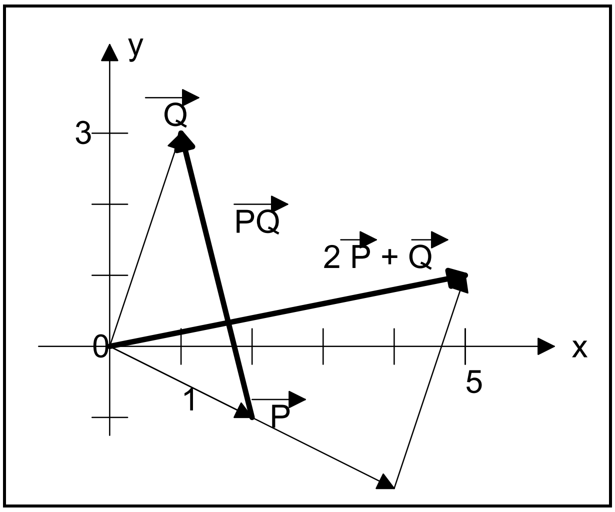
Beispiele:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \vec{P} + \vec{Q} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \\ 2 \cdot (-1) + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Veranschaulichung:



Natürlich kann auch im 3-dimensionalen Raum mit Vektoren gerechnet werden.

Beispiel: $A(1;2;-3),\ B(3;-1;5) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Vektorraum

In der Mathematik werden Vektoren auch allgemeiner betrachtet als Elemente einer Menge M mit einer Verknüpfung “+” und einer skalaren Multiplikation “$\cdot$”. Unter bestimmten Bedingungen bezeichnet man dise Menge als Vektorraum:

Definition: Man nennt V einen Vektorraum über $\Re$ oder reellen Vektorraum, in Zeichen $(V, \Re, +, \cdot)$, genau dann, wenn gilt:

1. (V,+) ist ein kommutative Gruppe.
2. Die S-Multiplikation erfüllt
   a) das gemischte Assoziativgesetz,
   b) das S-Distributivgesetz,
   c) das V-Distributivgesetz,
   d) das unitäre Gesetz.

Anmerkung: Die bisher vorgestellten Vektoren erfüllen die Kriterien für einen Vektorraum.