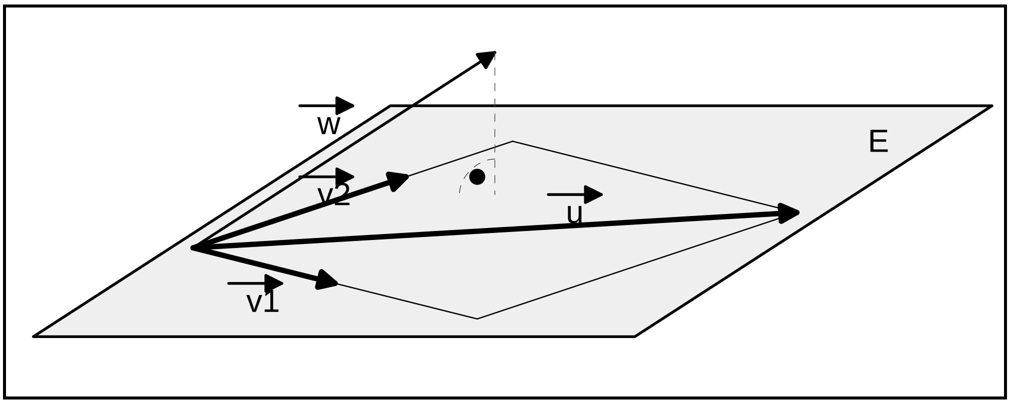
G2.2 Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Linearkombinationen

Beispiel: Wir betrachten die Vektoren des Anschauungsraumes in nachstehender Figur:



Man erkennt, dass sich $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ und $\vec{u}$ in die Ebene E legen lassen und dass sich $\vec{u}$ durch $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ ausdrücken lässt. Offenbar gilt $\vec{u} = 2 \cdot \vec{v_1} + \frac{3}{2} \cdot \vec{v_2}$.

Man sagt dazu, dass sich $\vec{u}$ als Linearkombination von $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ darstellen lässt. Alle Linearkombinationen von $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ lassen sich in die Ebene E legen. Daher lässt sich der Vektor $\vec{w}$ nicht als Linearkombination von $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ darstellen, da er sich nicht in die Ebene E legen lässt. Man kann weiterhin sagen, dass sich die Ebene E durch die Vektoren $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ aufspannen lässt.

Beispiel:
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Linearkombination der Vektoren $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, denn

$$4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die hier einfach vorgesetzten Koeffizienten 4 und 3 kann man erhalten, die Vektorgleichung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = k_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

führt auf das lineare Gleichungssystem

I) $1 = -2 \cdot k_1 + 3 \cdot k_2$
II) $1 = k_1 - k_2$.

Dieses System wird z. B. mit dem Additionsverfahren mit $k_1 = 4$ und $k_2 = 3$ gelöst.

Dagegen ist $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ keine Linearkombination von $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, denn der Ansatz

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = k_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + k_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

führt auf das Gleichungssystem

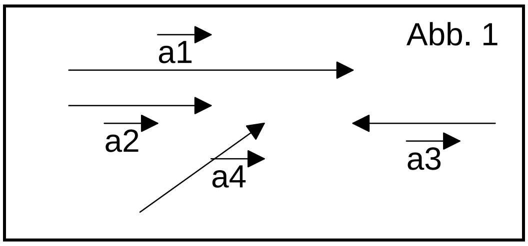
$$\begin{array}{ll} \text{I} & 1 = 1 \cdot k_1 + 0 \cdot k_2, \quad \text{also } k_1 = 1 \\ \text{II} & 2 = 1 \cdot k_1 + 0 \cdot k_2, \quad \text{also } k_1 = 2\ . \\ \text{III} & 1 = 0 \cdot k_1 + 1 \cdot k_2, \quad \text{also } k_2 = 1 \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem hat keine Lösung, denn es kann nicht gleichzeitig $k_1 = 1$ und $k_1 = 2$ gelten.

Lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Vektoren

Beispiel 1: Die Vektoren $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$ und $\vec{a_3}$ lassen sich gegenseitig durcheinander ausdrücken; z. B. gilt

$\vec{a_1} = 2 \cdot \vec{a_2}$ und $\vec{a_3} = -\vec{a_2}$ bzw. $\vec{a_1} - 2 \cdot \vec{a_2} = \vec{0}$.

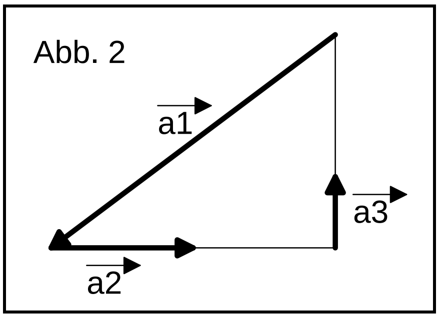


Dagegen lässt sich der Vektor $\vec{a_4}$ durch keinen der Vektoren $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$ oder $\vec{a3}$ ausdrücken.

Beispiel 2: Für die Vektoren $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$ und $\vec{a_3}$ gilt

$\vec{a_1} + 2 \cdot \vec{a_2} = -3 \cdot \vec{a_3}$ bzw.

$\vec{a_1} + 2 \cdot \vec{a_2} + 3 \cdot \vec{a_3} = \vec{0}$.



Beispiel 3: In der Situation von Abb. 1 lässt sich $\vec{a_4}$ nicht durch $\vec{a_3}$ ausdrücken bzw. die Vektorgleichung

$$k_1 \cdot \vec{a3} + k_2 \cdot \vec{a_4} = \vec{0}$$

ist nur dann erfüllt, wenn gleichzeitig $k_1 = 0$ und $k_2 = 0$ (triviale Linearkombination) gilt. In den beiden ersten Fällen ergeben dagegen z. B. $\vec{a_2}$ und $\vec{a_3}$ bzw. $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$ und $\vec{a_3}$ eine nichttriviale Nullsumme.

g2-2 erstellt am 21.04.2013

Geometrische Veranschaulichung: 2 Vektoren, die eine nichttriviale Nullsumme bilden, müssen parallel sein, 3 Vektoren mit nichttrivialer Nullsumme müssen sich in eine Ebene legen lassen.

Verallgemeinernd und zur Vereinfachung der Sprechweise legen wir fest:

Def: n Vektoren heißen genau dann linear abhängig, wenn sie sich nichttrivial zum Nullvektor linear kombinieren lassen. Andernfalls heißen sie linear unabhängig.

Im Beispiel 1 sind z. B. die Vektoren $\vec{a_1}$ und $\vec{a_3}$ linear abhängig, dagegen sind die Vektoren $\vec{a_1}$ und $\vec{a_4}$ linear unabhängig.

Der geometrische Zusammenhang zwischen Vektoren lässt unmittelbar folgende Bezeichnungen verstehen:

Zwei linear abhängige (also parallele) Vektoren heißen kollinear; drei linear abhängige (also in eine Ebene legbare) Vektoren heißen komplanar.

Basisvektoren

Beispiel: Die Vektoren $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind erkennbar linear unabhängig.

Jeder Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, z. B. $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ lässt sich als Linearkombination von $\vec{b_1}$ und $\vec{b_2}$ schreiben: Die Vektorgleichung

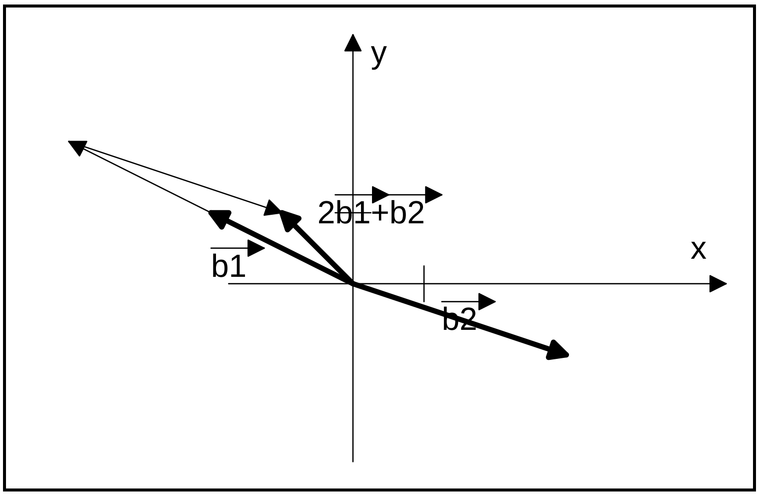
$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = k_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

führt auf das lineare Gleichungssystem

,

das erkennbar durch und $k_2 = 1$ gelöst wird.

Wir nennen dann $\vec{b_1}$ und $\vec{b_2}$ zusammen eine Basis;



bezüglich dieser Basis hat der Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Koordinaten 2 und 1.

Definition: Sind die Vektoren $\vec{a_1}, \vec{a_2} \in \Re^2$ linear unabhängig, dann nennt man sie zusammen eine Basis des $\Re^2$.

Sind die Vektoren $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3} \in \mathfrak{R}^3$ linear unabhängig, dann nennt man sie zusammen eine Basis des $\mathfrak{R}^3$.

Anmerkung:
Oft wird als Basis die so genannte Standardbasis mit den Vektoren

$$\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Basis des $\mathfrak{R}^3$ verwendet. Diese Standardbasis hat erstens den Vorteil, das für jedes $\overrightarrow{x} \in \mathfrak{R}^3$ gilt:

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + x_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + x_3 \cdot \overrightarrow{e_3},$$

dass also die Komponenten des Vektors $\overrightarrow{x}$ mit den reellen Zahlen der Linearkombination übereinstimmen. Diese Aussage gilt im $\mathfrak{R}^2$ entsprechend. Außerdem gilt, dass

$$|e_1^2| = |e_2^2| = |e_3^2| = 1.$$

Diese Vektoren mit dem Betrag 1 heißen Einheitsvektoren. Ist der Betrag eines Vektors $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ von 1 verschieden, so lässt sich daraus durch Multiplikation mit $\frac{1}{|\overrightarrow{a}|}$ ein Einheitsvektor gewinnen.

Beispiel: Der zum Vektor $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ gehörende Einheitsvektor ist

$$\overrightarrow{a}^0 = \frac{1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}} \cdot \overrightarrow{a} = \frac{1}{\sqrt{3^2+(-2)^2}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Definition: Gegeben sei ein Vektor $\overrightarrow{a} \in \mathfrak{R}^n$ $(n \in \{2, 3\})$ mit $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$. Dann heißt $\frac{1}{|\overrightarrow{a}|} \cdot \overrightarrow{a}$ Einheitsvektor und wird mit $\overrightarrow{a}^0$ bezeichnet.

Vektorgleichungen und lineare Gleichungssysteme

Bereits weiter oben wurde darauf hingewiesen, dass jede Vektorgleichung auf ein lineares Gleichungssystem führt; die Anzahl der Gleichungen ist gleich der Anzahl der Komponenten der Vektoren.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcccc} \mathrm{I} & 1 = & x_1 + & x_2 + & x_3 & \\ \mathrm{II} & 0 = & & x_2 + & x_3 & . \\ \mathrm{III} & 2 = & & & x_3 & \end{array}$$

Daraus folgt unmittelbar

$x_3 = 2$, $x_2 = -2$, $x_1 = 1$.

This document was created with Win2PDF available at http://www.win2pdf.de.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.
This page will not be added after purchasing Win2PDF.