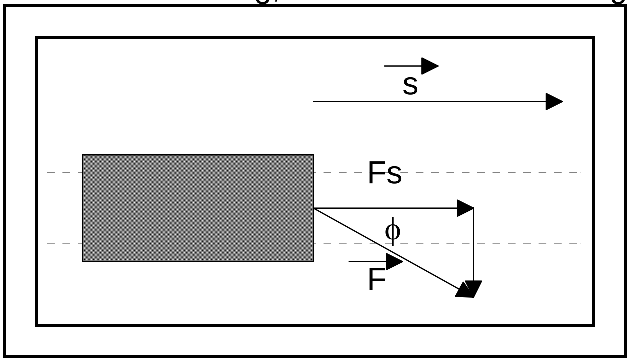
G2.3 Produkte von Vektoren

Das Skalarprodukt

Beispiel: Ein Schienenfahrzeug soll von einem Trailer ein Stück s gezogen werden, der neben den Schienen fährt (vgl. Skizze). Wir wollen die Arbeit berechnen unter der Voraussetzung, dass sich das Fahrzeug nur längs der Schienen bewegen kann.



In der Physik ist die Arbeit W als Produkt aus der Kraft F_s in Wegrichtung und der Weglänge s erklärt:

$W = F_s \cdot s$

Wegen $\frac{F_s}{F} = \cos\varphi \Leftrightarrow F_s = F \cdot \cos\varphi$

folgt daraus

$W = F_s \cdot s = F \cdot \cos\varphi \cdot s = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{s}\right| \cdot \cos\varphi = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{s}\right| \cdot \cos\left(\vec{F};\vec{s}\right) =: \vec{F} \cdot \vec{s}$

Mit dieser Festlegung ist ein Produkt von zwei Vektoren vereinbart worden, dessen Wert aber kein Vektor, sondern ein Skalar ist!

Definition: Unter dem Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ versteht man das Produkt aus $\left|\vec{a}\right|, \left|\vec{b}\right|$ und $\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)$. Dabei soll $\sphericalangle\left(\vec{a};\vec{b}\right)$ der Winkel sein, um den man $\vec{a}$ mathematisch positiv drehen muss, um die Richtung von $\vec{b}$ zu erhalten:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)$.

Eigenschaften, Rechengesetze, Sonderfälle

1. Vorzeichen: Für $90^0 < \varphi < 270^0$ gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, sonst $\vec{a} \cdot \vec{b} \geq 0$.

2. $\varphi = 90^0 \vee \varphi = 270^0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos 90^0 = 0$

3. Es genügt, Winkel $0^0 \leq \varphi \leq 180^0$ zu betrachten, da $\cos(180^0 + \varphi) = \cos(180^0 - \varphi)$

4. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos 0^0 = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| = a \cdot b$

5. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, weil $\cos\varphi = \cos(360^0 - \varphi)$ ist (Kommutativgesetz!)

6. $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \cos 0^0 = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| = a \cdot a = \left|\vec{a}\right|^2 = a^2$

7. $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c} \neq \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)$ Das Assoziativgesetz gilt im Allgemeinen nicht!

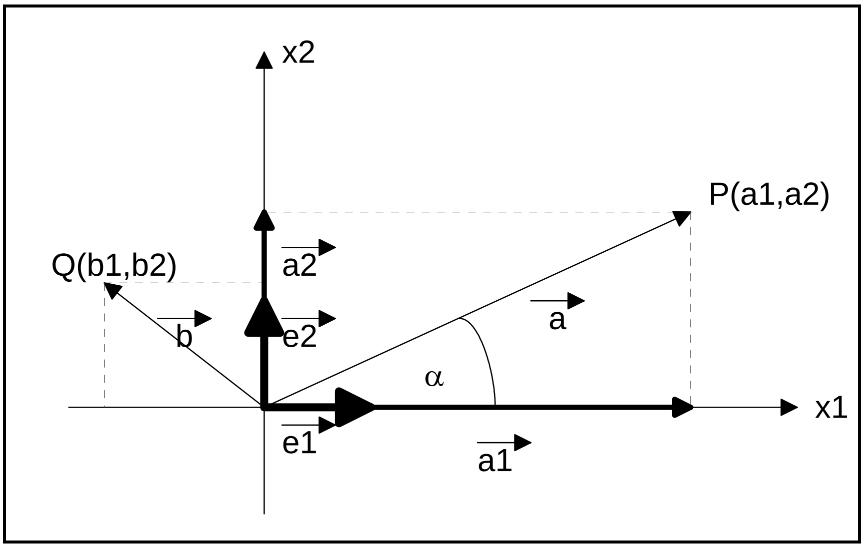
8. ohne Beweis: $\left(k \cdot \vec{a}\right) \cdot \vec{b} = k \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$

9. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (Distributivgesetz)

10. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b}$ (mehr dazu weiter unten!)

Das Skalarprodukt im orthonormierten Koordinatensystem

Skizze:



Der Vektor $\overrightarrow{0A} = \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ lässt sich mit Hilfe der entsprechenden Einheitsvektoren $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$ darstellen:

$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e_1} + a_2 \cdot \vec{e_2} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

Dabei gilt $\left|\vec{e_1}\right| = \left|\vec{e_2}\right| = 1 \Leftrightarrow \vec{e_1} \cdot \vec{e_1} = 1$, $\vec{e_1} \perp \vec{e_2} \Leftrightarrow \vec{e_1} \cdot \vec{e_2} = 0$ und $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

sowie $a_1 = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\alpha$ und $a_2 = \left|\vec{a}\right| \cdot \sin\alpha$

Für das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ gilt dann unter Anwendung der Rechenregeln für Vektoren

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(a_1 \cdot \vec{e_1} + a_2 \cdot \vec{e_2}\right) \cdot \left(b_1 \cdot \vec{e_1} + b_2 \cdot \vec{e_2}\right) = a_1 \cdot \vec{e_1} \cdot b_1 \cdot \vec{e_1} + a_1 \cdot \vec{e_1} \cdot b_2 \cdot \vec{e_2} +$$
$$+ a_2 \cdot \vec{e_2} \cdot b_1 \cdot \vec{e_1} + a_2 \cdot \vec{e_2} \cdot b_2 \cdot \vec{e_2} =$$

$$= a_1 \cdot b_1 \cdot \vec{e_1} \cdot \vec{e_1} + a_1 \cdot b_2 \cdot \vec{e_1} \cdot \vec{e_2} + a_2 \cdot b_1 \cdot \vec{e_2} \cdot \vec{e_1} + a_2 \cdot b_2 \cdot \vec{e_2} \cdot \vec{e_2} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2,$$

also

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}$$

Beispiel: In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ gegeben. Berechnen Sie $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) = 2 - 12 = -10.$$

Anmerkung: Wegen $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi$ bedeutet das negative Ergebnis des Produkts, dass $\cos\varphi < 0$ ist, dass also ϕ ein stumpfer Winkel ist.

Längenberechnungen

Im Folgenden beschränken wir uns auf die Koordinatendarstellung von Vektoren in orthonormierten Koordinatensystemen.

Dann gilt (vgl. letzter Abschnitt):

> Definition: Unter dem Betrag des Vektors a versteht man die reelle Zahl
> $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a}^2}$ bzw. $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Folgerungen:

1. $\left|\vec{a}\right| \geqslant 0$

2. $\left|\vec{a}^2\right| = \vec{a}^2$

3. $\left|\vec{a}\right| = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0$

Im kartesischen Koordinatensystem gilt z. B.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1- \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow a = \left|\vec{a}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{30}\,.$$

Definition: Ein Einheitsvektor ist ein Vektor mit dem Betrag 1.

Ein derartiger Vektor lässt sich leicht so erzeugen:

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{a}|\cdot\vec{e}}{|\vec{a}|} = \vec{e}$$

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\vec{a}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14} \Rightarrow \vec{a}^0 = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{-2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$

Winkelberechnungen

Die Definition des Skalarprodukts erlaubt eine einfache Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\cdot b}$$

Anmerkung: Für $\vec{a} = \vec{0}$ oder $\vec{b} = \vec{0}$ wird kein Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erklärt!

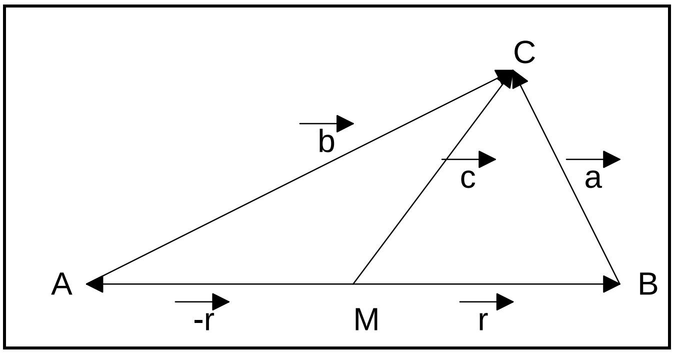
Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \cos\left(\vec{a}; \vec{b}\right) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2} \cdot \sqrt{3^2+(0)^2+4^2}} = \frac{1\cdot3-2\cdot0+2\cdot4}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{25}} = \frac{11}{15}$

daraus folgt (eindeutig!) $\sphericalangle\left(\vec{a}; \vec{b}\right) = \arccos\frac{11}{15} = 42{,}8^0$.

Folgerungen, Anmerkungen

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

Als Anwendungsbeispiele des Skalarprodukts bieten sich zum Beispiel Nachweise elementargeometrischer Sätze wie etwa des Satzes von Thales an:



Voraussetzung: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

Behauptung: C liegt auf dem Thaleskreis über $\overline{AB}$, d. h. $\left|\vec{r}\right| = \left|\vec{c}\right|$

Beweis:

$\vec{a} = -\vec{r} + \vec{c}, \; \vec{b} = \vec{r} + \vec{c}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(-\vec{r} + \vec{c}\right) \cdot \left(\vec{r} + \vec{c}\right) = \vec{c}^{\,2} - \vec{r}^{\,2} = c^2 - r^2 = 0 \Rightarrow r = c$

Mit Hilfe des Skalarprodukts lässt sich leicht ein Vektor $\vec{x}$ erstellen, der auf einem gegebenen Vektor $\vec{a}$ senkrecht steht (Normalenvektor).

Beispiel: Es soll ein Normalenvektor zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ gefunden werden.

Lösung: $\vec{a} \cdot \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{x}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot x_1 = 3 \cdot x_2 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3}{2} \cdot x_2$

Diese Gleichung ist nicht eindeutig lösbar, d. h. es gibt unendlich viele Normalenvektoren zu dem vorgegebenen Vektor $\vec{a}$; es ist aber leicht zu sehen, dass zum Beispiel

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \end{pmatrix}$

die Gleichung $\vec{a} \cdot \vec{x} = 0$ erfüllt.

Das Vektorprodukt

Auf das Vektorprodukt soll hier nur ganz kurz eingegangen werden.

Beispiel: Das Problem, zu zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einen gemeinsamen Normalenvektor $\vec{n}$ zu finden, führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \vec{n} \cdot \vec{a} = 0 \\ \text{II} & \vec{n} \cdot \vec{b} = 0 \end{array}$$

Dieses System führt zu einem Vektor, der als sog. Vektorprodukt (Kreuzprodukt) geschrieben werden kann:

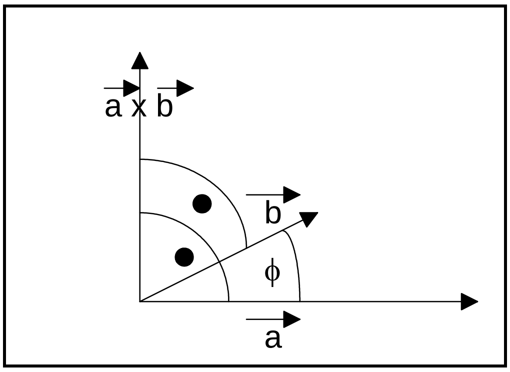
$$\boxed{\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} \text{ mit } |\vec{n}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \sphericalangle(\vec{a}; \vec{b})}$$

Das Vektorprodukt ist so definiert:

Definiton: Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist genau ein Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ zugeordnet, so dass

1. $\vec{a} \times \vec{b}$ senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$,
2. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ ein Rechtssystem bilden,
3. $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \sphericalangle(\vec{a}; \vec{b})$, wobei $0 \le \varphi \le \pi$ ist.

Skizze:



In kartesischen Koordinaten lässt sich (ohne Beweis) das Vektorprodukt so schreiben:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Anwendungen

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen ein Parallelogramm auf (vgl. Skizzen), das wegen

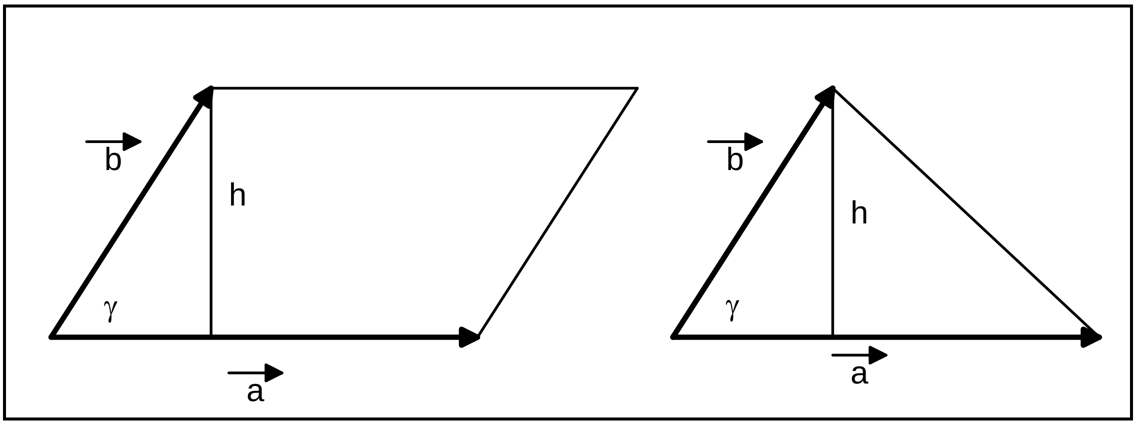
$$\frac{h}{b} = \sin(\gamma) \Rightarrow h = b \cdot \sin(\gamma) = \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(\gamma)$$

den Flächeninhalt

$$A_{\text{Parallelogramm}} = a \cdot h = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(\gamma) = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

hat. Das von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Dreieck hat den halben Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Für seinen Flächeninhalt gilt damit

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|.$$



Für den Flächeninhalt eines Dreiecks ABC gilt in einem orthogonalen Koordinatensystem

im R^2 : $A = \frac{1}{2} \cdot |(a_1b_2 - a_2b_1) + (b_1c_2 - b_2c_1) + (c_1a_2 - c_2a_1)|$

im R^3 : $A = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$

Für den Flächeninhalt eines Parallelogramms, aufgespannt von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im R^2, gilt

$$A = |a_1b_2 - a_2b_1|$$

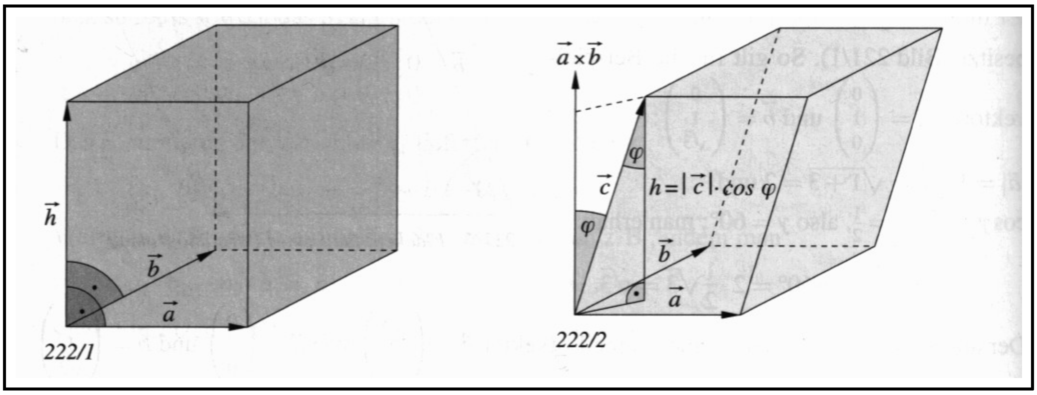
Ein gerades Prisma, dessen Grundfläche ein Parallelogramm ist und von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c} = \vec{h}$ aufgespannt wird, hat die Grundfläche $A = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$, die Höhe $\left|\vec{h}\right| = h$ und damit das Volumen $V = h \cdot \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$. Steht der Vektor $\vec{c}$ nicht senkrecht auf der durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Grundfläche, dann entsteht ein schiefes Prisma mit der Höhe

$$\frac{h}{|\vec{c}|} = \cos(\varphi) \Rightarrow h = \left|\vec{c}\right| \cdot \cos(\varphi)$$

Für das Spatvolumen gilt dann

$$V = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \cdot h = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \cdot \left|\vec{c}\right| \cdot |\cos(\varphi)| = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|.$$

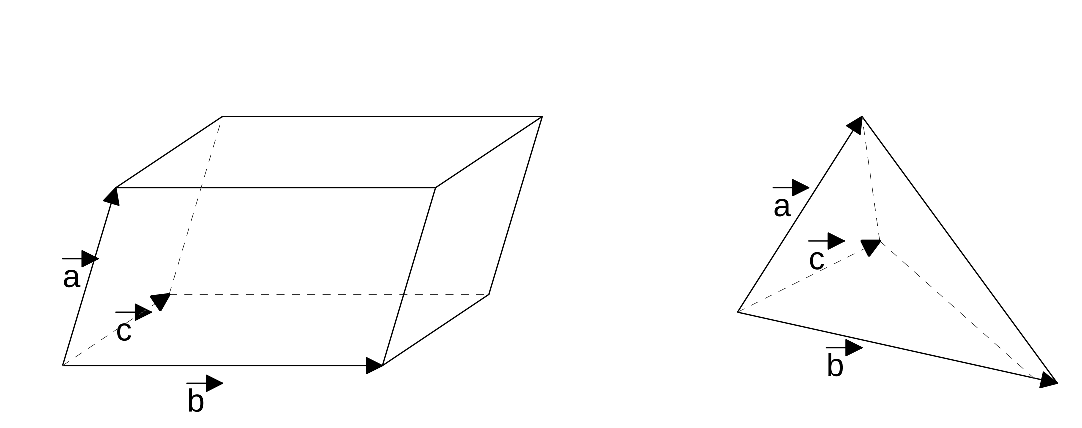
Die Verknüpfung, die den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ eine reelle Zahl zuordnet, heißt Spatprodukt.



Das Prisma in Abb. 222/2 kann durch einen Schnitt in zwei gleich große dreiseitige Prismen zerlegt werden. Da jedes derartige dreiseitige Prisma in drei volumengleiche Pyramiden zerlegt werden kann, folgt für die von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannte Pyramide

$$V_{Pyramide} = \frac{1}{6} \cdot \left|\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right|$$

Skizzen dazu:



Zusammenfassende Eigenschaften des Vektorprodukts, Anwendungen:

- $\vec{a} \times \vec{b}$ ist ein Vektor, der sowohl auf $\vec{a}$ als auch auf $\vec{b}$ senkrecht steht.
- Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein Rechtssystem (wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand).
- Das Vektorprodukt ist antikommutativ: $\vec{b} \times \vec{a} = -\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$.
- Schließen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ den Winkel φ ein, so gilt: $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(\varphi)$.
- Für den Flächeninhalt A eines von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms gilt $A_{Parallelogramm} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$.
- Für den Flächeninhalt A eines von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Dreiecks gilt $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$.
- Für das Volumen V eines von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelflachs gilt $V = \left|\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right|$.
- Für das Volumen einer von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten dreiseitigen Pyramide gilt $V = \frac{1}{6} \cdot \left|\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right|$