

3 Mathematische Algorithmen

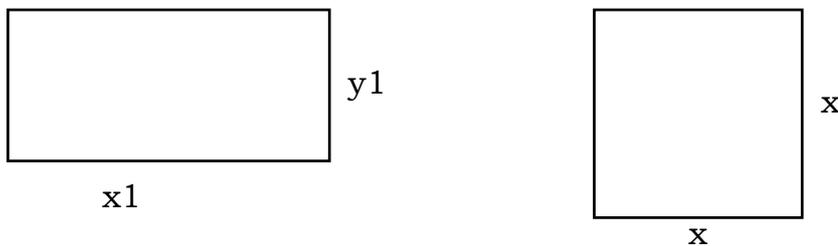
3.1 Entwicklung algorithmischer Lösungen von mathematischen Problemen

Erstes Beispiel: Wurzelberechnung nach Heron

Es soll der Wert der Quadratwurzel aus r für eine beliebige positive Zahl r mit einer vorgegebenen Genauigkeit g bestimmt werden.

Die Intervallschachtelung für eine Wurzel benötigt sehr viele Rechenschritte, um einen möglichst genauen Wert (Näherungswert) zu erhalten. Das Verfahren von Heron (griech. Mathematiker, ca. 100 v. Chr.) führt in der Regel rascher zum Ziel. Die meisten Taschenrechner verwenden dieses Verfahren.

Geometrisch kann die Lösung der Gleichung $x^2 = 5$ (allg.: $x^2 = r$) als Seitenlänge eines Quadrats mit dem Flächeninhalt 5 FE interpretiert werden. Als Näherung für dieses Quadrat eignet sich aber auch jedes Rechteck mit dem Flächeninhalt 5 FE. Die Aufgabe besteht also darin, ein Rechteck mit dem Flächeninhalt 5 FE (r) in ein inhaltsgleiches Quadrat zu verwandeln und die zugehörige Seitenlänge n zu finden.



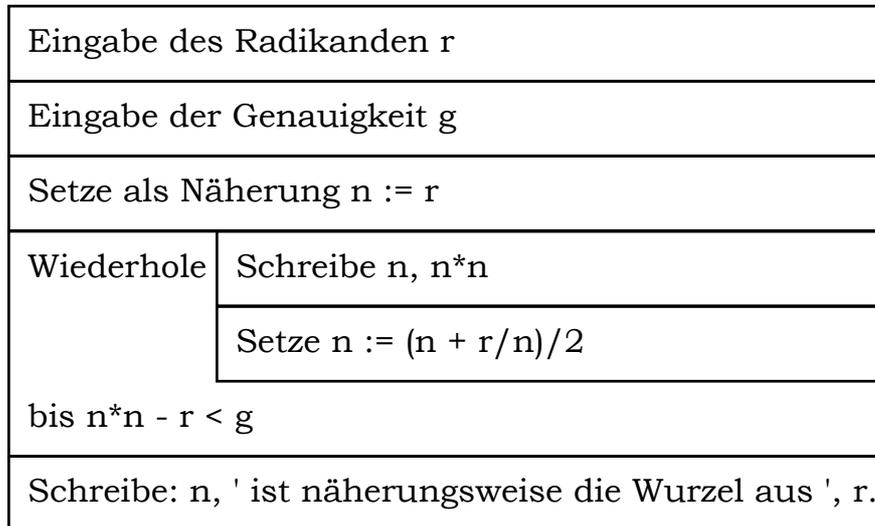
Überlegung: Ein Rechteck mit z. B. $x_1 = 2,5$ und $y_1 = 2$ hat den gesuchten Flächeninhalt, ist aber kein Quadrat.

Hérons Idee war, als neue Seitenlänge x_2 das arithmetische Mittel der beiden Rechteckseiten x_1 und y_1 zu nehmen ($x_2 = \frac{1}{2} \cdot (x_1 + y_1)$) und damit und mit dem verlangten Flächeninhalt die neue Rechteckbreite $y_2 = \frac{5}{x_2}$ zu berechnen. Dann ist zu prüfen, ob Länge und Breite des Rechtecks noch voneinander abweichen; ggf. kann dann die Verbesserung abbrechen, sonst ist der Verbesserungsschritt zu wiederholen.

Es lässt sich allgemein zeigen, dass das Verfahren von Heron für beliebige Radikanden ($R > 0$) und bei beliebiger positiver 1. Näherung konvergiert. Als

erste Näherung kann deshalb am einfachsten der Radikand selbst verwendet werden.

Struktogramm:



Codierung in Pascal:

```
program heron;
uses crt;
var n, r, g: real;
begin
  clrscr;
  write('Gib den Radikanden ein: '); readln(r);
  Write('Gib die Genauigkeit an: '); readln(g);
  writeln;
  n := r;
  repeat
    writeln(n:11:10, '          ', n*n:11:10);
    n := (n + r/n)/2
  until abs(n*n - r) < g;
  writeln(n:11:10, ' ist die Wurzel aus ', r:11:10);
  readln
end.
```

Änderung des Programms von Heron

An dem oben beschriebenen Programm lassen sich Änderungen vornehmen:

1. Sichere das Programm gegen die Eingabe eines negativen Radikanden.
2. Baue in das Programm einen verbesserte Startwert ein.