

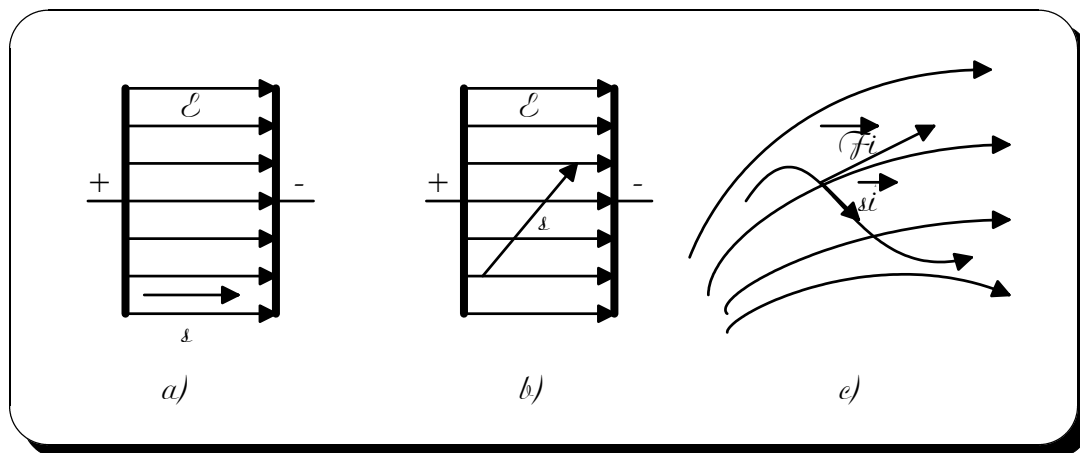
## 1.1.4 Potential; Äquipotentiallinien bzw. -flächen; potentielle Energie eines geladenen Teilchens im homogenen elektrischen Feld

Die Charakterisierung eines elektrischen Feldes in einem Raumpunkt durch Angabe von Feldstärke oder Kraft auf eine Probeladung kann wegen des Vektorcharakters beider Größen, die zu ihrer vollständigen Beschreibung die Angabe von Betrag und Richtung erfordern, leicht zu erheblichen rechnerischen Schwierigkeiten führen. In manchen Fällen bringt die Nutzung eines Zusammenhangs zwischen der bereits aus der Mittelstufe bekannten elektrischen Spannung  $U$  und der elektrischen Feldstärke  $E$  Vorteile.

### Arbeit im elektrischen Feld

Eine Probeladung  $Q_p$  erfährt in einem elektrischen Feld  $E$  andauernd eine Kraft  $F$ , die nach  $F = Q_p \cdot E$  berechnet werden kann. Zur Bewegung der Probeladung in einem elektrischen Feld ist daher im allgemeinen eine Arbeit  $W$  erforderlich.

Bei der Berechnung der Arbeit, die bei der Verschiebung einer Probeladung  $Q_p$  von einem Punkt  $P_1$  zu einem Punkt  $P_2$  in einem elektrischen Feld aufzubringen ist bzw. dabei frei wird, können folgende Sonderfälle auftreten:



a) Einfachster Fall:  $\vec{E} // \vec{s}$  und  $E = \text{const. längs } s$ .

Für  $W$  folgt dann

$$W_{12} = F \cdot s = Q_p \cdot E \cdot s = Q_p \cdot E \cdot s.$$

Anmerkung: Die Vereinfachung folgt aus der Definition des Skalarprodukts für den Sonderfall paralleler Vektoren.

b)  $E = \text{const. längs } s$ , aber  $E$  und  $s$  schließen einen konstanten Winkel

$$\varphi = \varphi(\vec{E}; \vec{s}) \text{ ein.}$$

Für  $W$  folgt dann

$$W_{12} = Q_p \cdot E \cdot s = Q_p \cdot E \cdot s \cdot \cos(\varphi).$$

Anmerkung: In beiden Fällen ist die Geradlinigkeit von  $s$  keine zwingende Voraussetzung!

c) Allgemeiner Fall:  $E$  ist weder dem Betrag noch der Richtung nach längs des beliebigen (auch krummlinigen) Weges  $s$  konstant.

Zur Berechnung von  $W$  wird  $s$  in Teilwege  $\Delta s_i$  ( $\vec{s}_i$ : Ortsvektor zum Punkt  $P_i$ ) zerlegt, längs denen  $E$  als konstant angenommen wird.

Für  $W_{12}$  folgt dann:  $W_{12} = Q_p \cdot \vec{E}_1 \cdot \Delta \vec{s}_1 + \dots + Q_p \cdot \vec{E}_n \cdot \Delta \vec{s}_n$

$$W_{12} = \sum_{i=1}^n Q_p \cdot \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{s}_i.$$

Wegen der Annahme der Konstanz von  $E_i$  längs  $\Delta s_i$  stellt diese Gleichung natürlich auch nur eine Näherung dar. Diese lässt sich verbessern, wenn man die  $\Delta s_i$  verkleinert und damit die Zahl der Teilwege  $\Delta s_i$  vermehrt:

$$W_{12} = \lim_{n \rightarrow \infty} (Q_p \cdot \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{s}_i) = Q_p \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{s}_i = Q_p \cdot \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Es bleibt zunächst die Frage offen, ob der Wert des Integrals und damit die Arbeit  $W_{12}$  von der Art des Weges zwischen den Punkten  $P_1$  und  $P_2$  abhängt. Mit Hilfe des Energiesatzes, dessen allgemeine Gültigkeit vorausgesetzt wird, lässt sich zeigen, dass dies nicht der Fall ist. Wäre nämlich der Arbeitsüberschuss bei der Bewegung der Ladung auf einem Weg 1 von  $P_1$  nach  $P_2$  größer als die aufzuwendende Arbeit von  $P_2$  nach  $P_1$  auf einem Weg 2, so könnte man durch Herumführen der Probeladung von  $P_1$  längs des Weges 1 nach  $P_2$  und zurück längs des Weges 2 andauernd Energie gewinnen. Dies ist aber nach dem Energiesatz nicht möglich!

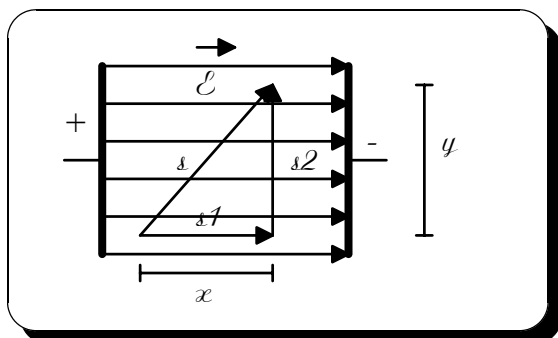
Zusammenfassung: Wird in einem elektrischen Feld  $E$  eine Probeladung  $Q_p$  längs  $s$  bewegt, so ist die dabei aufzuwendende bzw. freiwerdende Arbeit  $W_{12}$  gegeben durch

$$W_{12} = Q_p \cdot \int \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Die Arbeit ist vom gewählten Weg unabhängig.

### Energie eines geladenen Teilchens im homogenen elektrischen Feld

Besonders leicht ist die Energie eines Teilchens im homogenen Feld zu berechnen, da darin die Feldstärke konstant ist. Zur Berechnung wird die Arbeit  $W_{12}$  beim Verschieben einer Probeladung  $Q_p$  längs des Weges  $s$  berechnet:



Der skizzierte Weg  $s$  lässt sich wegen der Unabhängigkeit der Arbeit vom Weg durch die Teilwege 1 und 2 ersetzen, die parallel bzw. senkrecht zum Feldstärkevektor verlaufen.

Für die Verschiebungsarbeit  $W_{12}$  gilt dann

$$W_{12} = Q_p \cdot \sum_{i=1}^2 \vec{E}_i \cdot \vec{s}_i = Q_p \cdot (\vec{E} \cdot \vec{x} + \vec{E} \cdot \vec{y}).$$

Wegen  $\vec{E} // \vec{x}$  gilt  $\vec{E} \cdot \vec{x} = E \cdot x$ ,

wegen  $\vec{E} \perp \vec{y}$  gilt  $\vec{E} \cdot \vec{y} = 0$ .

Daraus folgt

$$W_{12} = Q_p \cdot E \cdot x.$$

Mit diesem Term wird auch die Energie eines Teilchens der Ladung  $Q_p$  angegeben, das in einem homogenen elektrischen Feld die Strecke  $x$  gegen die Feldlinien bewegt worden ist; die Bewegung senkrecht zu den elektrischen Feldlinien ist für die Energie nicht relevant.

Anmerkung:

Ein sich von einer Kondensatorplatte zur anderen bewegendes Teilchen gewinnt dabei die Energie  $W = Q_p \cdot E \cdot d$ .

## Das elektrische Potential

Die Arbeit im elektrischen Feld ist - wie schon die Kraft auf eine Probeladung - von der Probeladung  $Q_p$  abhängig. Einen ladungsunabhängigen Term erhält man wieder, indem man den Quotienten  $W_{12}/Q_p$  bildet. Dabei gibt  $W_{12}/Q_p$  diejenige Energie an, die die Ladung  $Q_p$  bei der Verschiebung im elektrischen Feld  $E$  von  $P_1$  nach  $P_2$  gewonnen hat; sie heißt Potential  $\Phi$  des Punktes  $P_1$  bzgl.  $P_2$ .

Definition: Das elektrostatische Potential eines Punktes  $P_1$  gegenüber einem (willkürlich wählbaren) Bezugspunkt  $P_2$  ist gleich dem Quotienten aus der Überführungsarbeit  $W_{12}$  und der Probeladung  $Q_p$ :

$$\Phi_{12} = \frac{W_{12}}{Q_p} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}(s) \cdot d\vec{s}.$$

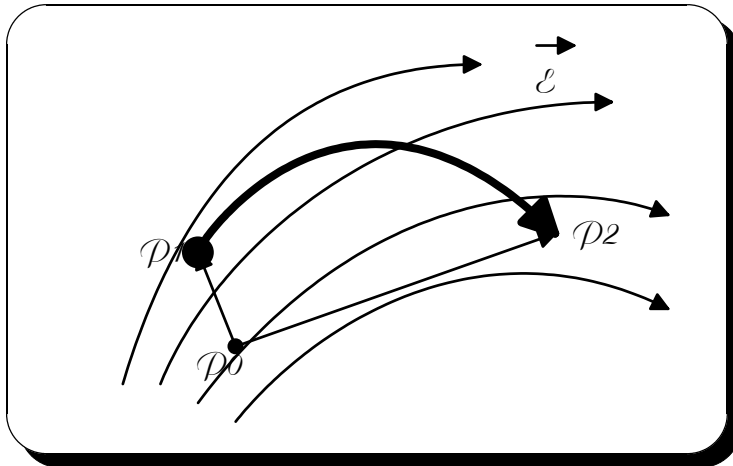
Für die Einheit des Potentials gilt:  $1 \frac{J}{C} = 1 \frac{VAs}{As} = 1V$ .

Anmerkungen:

1. Im Gegensatz zur elektrischen Feldstärke ist das Potential eine skalare Größe. Sie kann mit der Hubarbeit im Gravitationsfeld verglichen werden (Verschiebungsarbeit bei "Einheitsladung").
2. Der Wert des Potentials ist nach Definition nicht nur von der Lage von  $P_1$ , dem Ort, für den das Potential angegeben wird, sondern auch von der des Bezugspunkts  $P_2$  abhängig. Dieser muss daher stets angegeben werden. Häufig wird ein geerdeter Punkt als Bezugspunkt gewählt; die Erde hat dann das Potential Null. Gelegentlich ordnet man aber auch einem "unendlich fernen" Punkt das Potential Null zu.

- 
3. Das resultierende Potential  $\Phi_{\text{ges}}$  im Feld mehrerer felderzeugender Ladung erhält man wegen des skalaren Charakters des Potentials einfach als Summe der Einzelpotentiale:  $\Phi_{\text{ges}} = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_n$ .

Der Potentialbegriff ist noch in weiterer Hinsicht für die Arbeit bedeutungsvoll: Es soll z. B. eine Probeladung  $Q_p$  von einem Feldpunkt  $P_a$  zu einem Feldpunkt  $P_e$  verschoben werden; der Potentialnullpunkt sei der Punkt  $P_0$  (vgl. Skizze!).



Dann gilt für die skalare Größe Arbeit:

$$W_{02} = W_{01} + W_{12} \text{ bzw.}$$

$$W_{12} = W_{02} - W_{01} = Q_p \cdot \Phi_2 - Q_p \cdot \Phi_1 = Q_p \cdot (\Phi_2 - \Phi_1) = Q_p \cdot \Delta\Phi$$

unabhängig von der Wahl des Potentialnullpunkts (vgl. mit der Hubarbeit  $\Delta W_h = m \cdot g \cdot h$  in der Nähe der Erdoberfläche!).

### Äquipotentialflächen

Punkte gleichen Potentials liegen auf sog. Äquipotentialflächen. Aus den zuletzt überlegten Beziehungen lässt sich dann sofort folgern:

1. Alle Punkte eines stromlosen Leiters sind Äquipotentialflächen; andernfalls würden Ladungen sich längs Feldlinien bewegen!
2. Äquipotentialflächen verlaufen stets senkrecht zur Richtung der elektrischen Feldlinien.

Begründung: Bei der Verschiebung einer Probeladung längs einer Äquipotentialfläche darf in keinem Moment Arbeit verrichtet werden. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn stets  $Q_p \cdot E \cdot \Delta s = 0$  gilt. Dies ist erfüllt, wenn  $\vec{E} \perp \vec{s}$  gilt.

---

Beispiele für Äquipotentiallinien:

