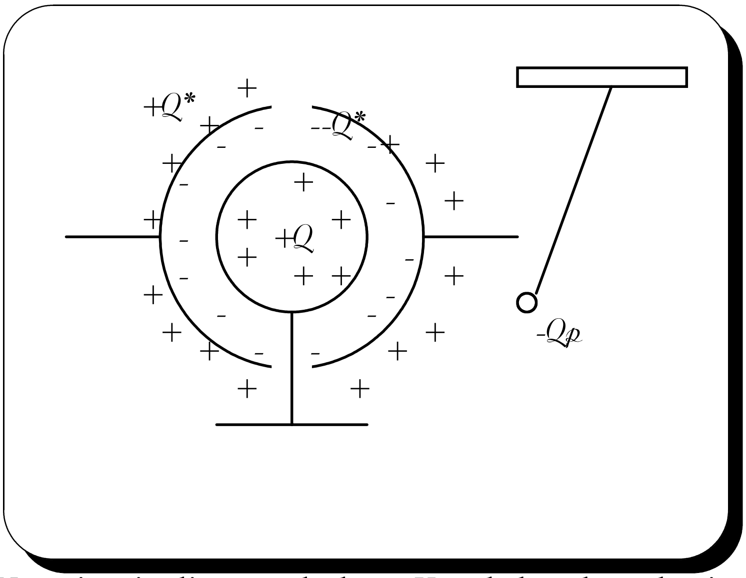
1.1.8 Radialsymmetrisches elektrisches Feld, Coulomb-Gesetz; Kapazität des Kugelkondensators

Die Feldstärke im radialen Feld - das Coulombsche Gesetz

Am Ende des letzten Kapitels wurde die Grundgleichung des elektrischen Feldes $D = \varepsilon_0 \cdot E$ (im Vakuum) hergeleitet. Mit Hilfe dieser Gleichung soll jetzt das radialsymmetrische Feld um eine Punktladung ermittelt werden.

Versuch:



Um eine isolierte geladene Konduktorkugel mit der Ladung Q und dem Radius R werden zwei ungeladene Halbkugeln gestülpt und zu einer Hohlkugel mit dem größeren Radius r zusammengefügt. Dann werden die Kraft F auf die Probeladung Q_P vor und nach dem Überstülpen sowie die influenzierte Ladung Q* gemessen.

Ergebnisse:

1. F und damit das Feld ist unabhängig von der Größe der ladungsführenden Kugeln.
2. $Q = Q^*$, $Q = |-Q^*|$.

Erklärung: Die Ladungen der Konduktorkugel influenzieren auf der Innenseite der ungeladenen Hohlkugeln eine entgegengesetzt gleiche Influenzladung -Q*, so dass auf der Außenseite eine Ladung Q* übrig bleibt, die in Größe und Vorzeichen mit der ursprünglichen Ladung Q der Konduktorkugel übereinstimmt.
Im Grunde wird das Feld der influenzierten Ladung +Q* gemessen, deren Flächendichte σ wesentlich kleiner ist als die der ursprünglichen Ladung Q. Am Feld außerhalb der Kugel ändert dies aber offenbar nichts!

In einem hinreichend kleinen Bereich können die weiter oben für das homogene Feld erhaltenen Gesetzmäßigkeiten auch hier angewandt werden. Es gilt daher für die Flächendichte der influenzierten Ladung in der Entfernung r vom Kugelmittelpunkt:
$\sigma = \frac{Q^*}{A} = \varepsilon_0 \cdot E$ bzw.
$\frac{Q^*}{4 \cdot \pi \cdot r^2} = \varepsilon_0 \cdot E$,
woraus sofort
$E = \frac{Q^*}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}$ folgt.

Anmerkung:
Das Ergebnis zeigt, dass die Feldstärke nicht davon abhängt, auf welcher Kugel die Ladung verteilt ist; man kann sich daher eine auf einer Kugel verteilte Ladung Q auch im Kugelmittelpunkt konzentriert denken!

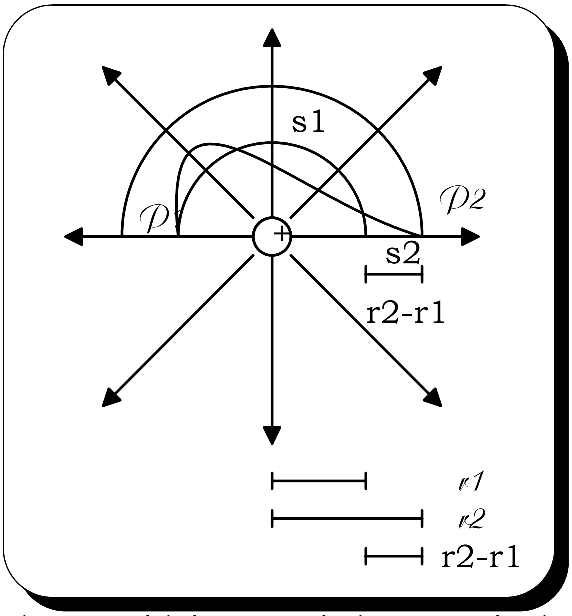
Mit der Gleichung $F = Q_p \cdot E$ folgt für die Kraft F, die von einer Punktladung Q im Abstand r von einer Probeladung Qp auf diese wirkt,
$F = \frac{Q_P \cdot Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}$.

Zusammenfassung: Die Feldstärke E außerhalb einer Kugel, die an ihrer Oberfläche gleichmäßig geladen ist, hängt nicht vom Kugelradius R, sondern von der Ladung Q der Kugel und von der Entfernung r des Feldpunktes vom Kugelmittelpunkt M ab. In der Entfernung r vom Kugelmittelpunkt M gilt für die Feldstärke E:
$E = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}$.
Die Kraft F, mit der zwei kugel- oder punktförmige Ladungen Q und Q_p aufeinander wirken, ist gegeben durch
$F = \frac{Q_p \cdot Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}$.
Die Kraft F zeigt in Richtung der Verbindungslinie der beiden Kugelmitten und ist je nach Vorzeichen anziehend oder abstoßend.

Arbeit, Spannung und Potential im radialen Feld

Bei der Einführung der Begriffe Arbeit, Potential und Spannung erhielten wir die Gleichungen
$W = Q_p \cdot \int_{r_1}^{r_2} \overrightarrow{E(r)} \cdot d\vec{r}$ und $\Phi = \frac{W}{Q_p}$.
Im radialen Feld lassen sich beide Größen nach Kenntnis von E(r) leicht berechnen:
Die Arbeit bei der Verschiebung der Probeladung Q_p von P_1 zu P_2 lässt sich in zwei Teilwege s_1 und s_2 zerlegen.
Längs des Weges s_1 stehen Kraft- und Wegvektor aufeinander senkrecht, die Teilarbeit ΔW_1 ist deshalb gleich Null.
Längs des Weges s_2 sind Kraft- und Wegvektor parallel, aber die Kraft F ist längs des Weges nicht konstant, d. h.

$\Delta W_2 = Q_P \cdot \int_{r_1}^{r_2} \overrightarrow{E(r)} \cdot d\vec{s} = Q_P \cdot \int_{r_1}^{r_2} E(r) \cdot dr$.



Die Verschiebungsarbeit W_{12} reduziert sich dann auf

$W_{12} = Q_p \cdot \int_{r_1}^{r_2} E(r)dr = Q_p \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{Q_p \cdot Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int r^{-2}dr = \frac{Q_p \cdot Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot [\frac{-1}{r}]_{r_1}^{r_2}$

bzw. $W_{12} = \frac{Q_p \cdot Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot (\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$.

Für das Potential des Punktes P_1 mit P_2 als Bezugspunkt bzw. die Spannung U_{12} zwischen P_1 und P_2 findet man wegen

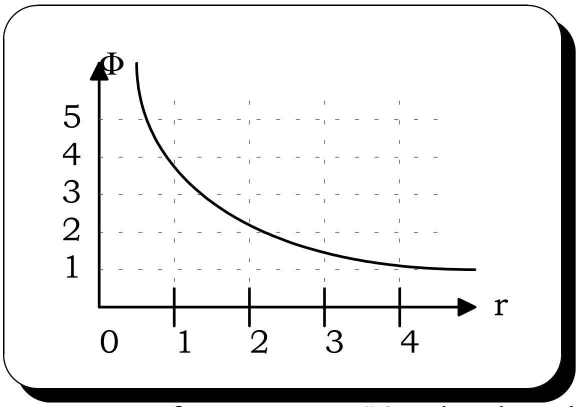
$\Phi_{12} = \frac{W_{12}}{Q_p}$:

$\Phi_{12} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot (\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}) = U_{12}$.

Der Term vereinfacht sich noch wesentlich, wenn man den Bezugspunkt P_2 "ins Unendliche" verschiebt ($r_2 \to \infty \Leftrightarrow \frac{1}{r_2} \to 0$):

$\Phi_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_1}$.

Veranschaulichung:



Zusammenfassung: Im "Coulomb-Feld" gilt für die Arbeit W_{12} bei der Überführung der Probeladung Q_p vom Punkt P_1 zum Punkt P_2:

$W_{12} = \frac{Q_p \cdot Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot (\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$.

Die Spannung U_{12} zwischen P_1 und P_2 ist gegeben durch
$U_{12} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$.
Für das Potential Φ_1 am Ort P_1 bei unendlich fernem Bezugspunkt gilt
$\Phi_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_1}$.

Die Kapazität des Kugelkondensators

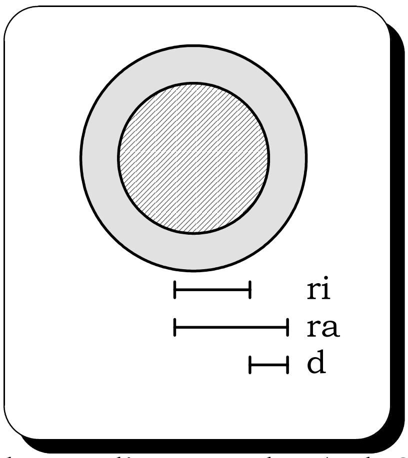
Im radialen Feld gelten die oben angeschriebenen Gleichungen für die Arbeit bzw. die Spannung. Für eine geladene Kugel mit Radius R kann ihre Kapazität "gegen Unendlich" induktiv ermittelt werden. Es gilt unter Zuhilfenahme der bekannten Kondensatorgleichung
$C = Q : U$
$C = Q : \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ (wegen $r_1 = R$!) bzw.
$C = 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R$.

Die Beziehung $C \sim R$ kann mit folgendem Versuch leicht bestätigt werden:

Versuch: Eine Metallkugel mit dem Radius R wird möglichst weit von der geerdeten Umgebung entfernt an einem isolierten Faden aufgehängt. Dann wird die Kugel durch die Spannung U geladen und anschließend über den Messverstärker entladen. Dieser Versuch wird mit Kugeln mit verschiedenen Durchmessern durchgeführt.
Ergebnisse:
1. $Q \sim U$
2. $Q \sim R$

Folgerung:
$Q \sim U \cdot R$ bzw. $\frac{Q}{U} = C \backsim R$.

Besteht ein Kugelkondensator aus zwei konzentrischen Kugelschalen mit



den Radien r_i und r_a (vgl. Skizze!), so gilt wegen $\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a} = \frac{r_a - r_i}{r_i \cdot r_a}$
für die Kapazität C:
$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{r_i \cdot r_a}{r_a - r_i}$.
Führt man weiterhin für den Abstand d zwischen den beiden Kugelflächen
$d = r_a - r_i$,

ferner $r = \sqrt{r_a \cdot r_i}$
als geometrisches Mittel aus den beiden Kugelradien ein, so nimmt die Gleichung für die Kapazität C des Kugelkondensators die Form
$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 r^2}{d}$
an. Überlegt man noch, dass $4 \cdot \pi \cdot r^2$ die Oberfläche der zwischen den beiden Kugeln gelegenen Kugelschale mit dem mittleren Radius r ist, dann erhält man für die Kapazität des Kugelkondensators
$C = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$,
einen Zusammenhang, der formal identisch ist mit der Gleichung für die Kapazität des Plattenkondensators.

Anmerkung:
Man kann sich einen Plattenkondensator aus einem Kugelkondensator entstanden denken, wenn man aus letzterem bei unendlich großem Radius einen Kegel herausschneidet, dessen Spitze im Kugelmittelpunkt liegt!

Zusammenfassung: Ein Kugelkondensator mit einem mittleren Kugelradius r und einem Kugelschalenabstand d hat die Kapazität
$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 r^2}{d}$.