1.1.9 Elektrisches Feld als Träger elektrischer Energie; Energiedichte des elektrischen Feldes; Kraft zwischen den Platten eines geladenen Kondensators

Energieinhalt eines geladenen Kondensators

Wenn eine Spannungsquelle einen Kondensator auflädt, muss sie Arbeit verrichten, um immer weiter Elektronen gegen die elektrostatischen Abstoßungskräfte auf eine Kondensatorplatte zu pumpen; ein geladener Kondensator hat dann nach unseren Vorstellungen von den Energieumwandlungen Energie gespeichert. Indiz dafür ist zum Beispiel die Entladung eines Kondensators über eine Glimmlampe, die dabei kurz aufblitzt.

Soll ein Kondensator der Kapazität C durch die Ladung Q_0 auf eine Spannung U_0 aufgeladen werden, so ist dazu die Arbeit

$$W = \int_0^{U_0} Q(U)dU$$

erforderlich. Die zunächst nahe liegend erscheinende Gleichung $W = Q_0 \cdot U_0$ ist hier nicht anwendbar, da U während des Ladevorgangs nicht konstant ist, sondern nach der Kondensatorgleichung C = Q/U vom momentanen Ladezustand des Kondensators abhängt.
Unter Verwendung der Kondensatorgleichung

$$C = \frac{Q}{U} \; Q = C \cdot U \text{ bzw. } U = \frac{Q}{C}$$

lässt sich das Integral sofort berechnen:

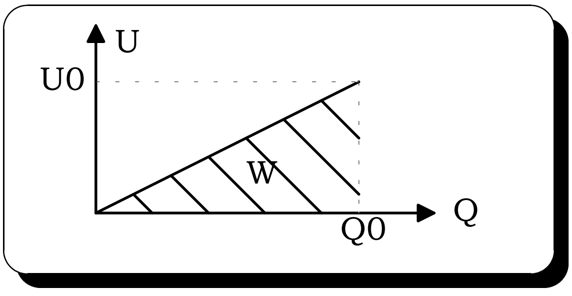
$$W = \int_0^{U_0} C \cdot U \cdot dU = C \cdot \left[\tfrac{1}{2}U^2\right]_0^{U_0} = \tfrac{1}{2} \cdot C \cdot U_0^2.$$

Mit der Kondensatorgleichung erhält man leicht die äquivalenten Terme

$$W = \tfrac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 = \frac{Q^2}{2C} = \tfrac{1}{2} \cdot Q \cdot U,$$

wobei der Index 0 zur Vereinfachung gleich weggelassen wurde.

Dieses letzte Ergebnis lässt sich leicht mit Hilfe eines Diagramms verstehen, in dem die Spannung U über der Ladung Q aufgetragen wird. Der schraffierte Bereich ergibt unmittelbar ein Maß für die Arbeit beim Aufladen des Kondensators (es gilt in jedem Moment $\Delta W = U \cdot \Delta Q$); dieser wird aber genau durch den Term $Q_0 \cdot U_0$ / 2 beschrieben.



Die elektrische Energie kann auch durch die Feldgrößen E und D des Kondensatorfeldes ausgedrückt werden: Wegen
$C = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$, $U = E \cdot d$, $D = \varepsilon_0 \cdot E$ und $W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$
gilt
$W = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \cdot E^2 \cdot d^2 = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \varepsilon_0 \cdot E \cdot A \cdot d$ bzw.
$W = \frac{1}{2} \cdot E \cdot D \cdot V$.

Anmerkung:
Nach der letzten Gleichung hängt die Energie des elektrischen Feldes nur von den Feldgrößen und dem felderfüllten Volumen ab. Dies stimmt damit überein, dass man zum auseinander Ziehen von zwei Kondensatorplatten Arbeit gegen die elektrostatischen Anziehungskräfte verrichten muss, die sich in Energiezunahme äußert.

Energiedichte

Die Energiedichte w des Kondensatorfeldes wird in bekannter Weise berechnet:
$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \cdot E \cdot D$.

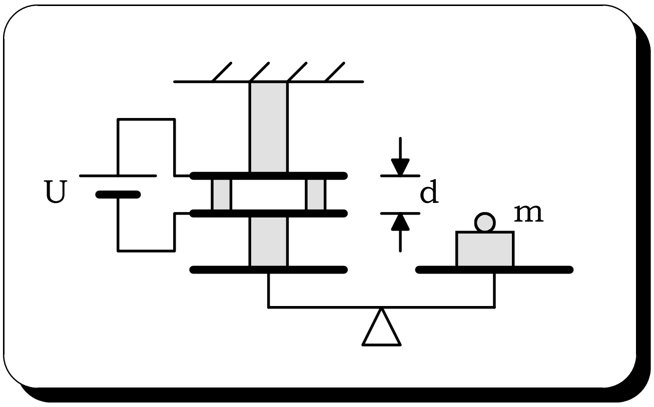
Anmerkung: Dieses letzte Ergebnis wurde für das homogene Feld des Plattenkondensators hergeleitet. Es gilt aber ganz allgemein für jedes elektrische Feld, da jedes Feld in einem hinreichend kleinen Bereich als homogen angesehen werden kann. Für die in einem Volumen V innerhalb eines beliebigen elektrischen Feldes gespeicherte Energie gilt dann aber
$W = \int w \cdot dV = \frac{1}{2} \int EDdV$.

Zusammenfassung: Die Energie eines geladenen Kondensators beträgt $W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$. Das elektrische Feld ist Sitz von Energie. Unter der Energiedichte w eines elektrischen Feldes versteht man den Quotienten $w = \frac{W}{V}$ (im homogenen Feld) bzw. $w = \frac{dW}{dV}$. Für die Energiedichte w gilt in beliebigen Feldern $w = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2$.

Die Kraft zwischen zwei Kondensatorplatten

Die zwischen zwei Kondensatorplatten wirkende anziehende Kraft kann nicht ohne weiteres mit Hilfe der Beziehung $F = Q_p \cdot E$ berechnet werden; sie kann aber mit einer sog. Spannungswaage gemessen werden.

Versuch:
Zwei Kondensatorplatten stehen genau übereinander, durch Distanzstücke der Dicke d getrennt. Die obere Platte ist fixiert, die untere steht auf einer Tafelwaage; die Anordnung ist austariert. Dann wird eine Spannung U an die Platten gelegt und eine Zusatzmasse m auf den Waagebalken mit der unteren Platte aufgelegt.



Ergebnis: Der Waagebalken mit der Kondensatorplatte und der Zusatzmasse m sinkt erst, wenn die Spannung U unter einen bestimmten Wert abgesunken ist; dann ist die Kraft zwischen den Platten genau so groß wie das Gewicht der Zusatzmasse m. Man erhält zum Beispiel für U = 5 kV, d = 2 mm und A = 400 cm^2 die Kraft F = 1 N.
Eine Berechnung von F nach der bekannten Gleichung $F = Q \cdot E$ ergibt dagegen
$F = Q \cdot E = C \cdot U \cdot \frac{U}{d} = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \cdot U \cdot \frac{U}{d} = \varepsilon_0 \cdot A \cdot \frac{U^2}{d^2} = 2$ N!

Die Kraft F zwischen zwei Kondensatorplatten lässt sich aus dem Energieausdruck wie folgt herleiten: In einem abgeschlossenen System - das bedeutet hier, dass die Ladungen auf den Kondensatorplatten konstant bleiben - ist die von den Kräften geleistete Arbeit nach dem Energieprinzip gleich der Abnahme der elektrischen Energie.

Gedankenexperiment: Die Platten eines geladenen, von der Spannungsquelle getrennten Kondensators werden um ein Stück Δx auseinander gezogen. Wegen der Konstanz der Ladungen bleiben Feldstärke E und Kraft F ebenfalls konstant, so dass gilt:
$\Delta W_{mech} = F \cdot \Delta x = \frac{1}{2} \cdot E \cdot D \cdot \Delta V = \Delta W_{elektrisch}$.
Für die Anziehungskraft F folgt daraus
$F = \frac{E \cdot D \cdot A \cdot \Delta x}{2 \cdot \Delta x} = \frac{1}{2} \cdot E \cdot D \cdot A$.
Mit
$E = \frac{U}{d}$ und $D = \varepsilon_0 \cdot \frac{U}{d}$
lässt sich die Gleichung für F umschreiben:
$F = \frac{1}{2} \cdot \frac{U}{d} \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{U}{d} \cdot A = \frac{1}{2} \cdot A \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{U^2}{d^2}$.
Dies ist aber genau die Hälfte des vorher für F hergeleiteten Terms; der neue Term beschreibt die Kraft F richtig!
Der scheinbare Widerspruch lässt sich so erklären: Die Feldstärke E zwischen den Kondensatorplatten rührt wegen $Q_1 = -Q_2$ in nicht zu großem Abstand von den Platten gleichermaßen von beiden Platten her, d. h. die linke Platte liefert für die Kraft auf die rechte Platte den Feldbeitrag $E' = \frac{E}{2}$, während die rechte Platte auf sich selbst ja keine Kraft ausübt. $E = 2 \cdot E'$ ist aber für jede weitere dritte Ladung bedeutsam!