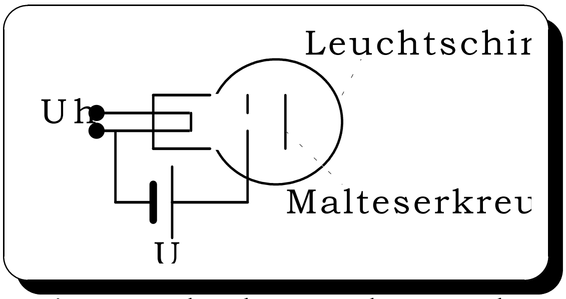
1.1.11 Bewegung geladener Teilchen in elektrischen Feldern; homogenes Feld, Zentralfeld

Bewegung in homogenen Feldern

Geladene Teilchen erfahren in elektrischen Feldern Kräfte; diese bewirken nach dem 2. Newton-Gesetz
$F = m \cdot a$
eine Beschleunigung a in Richtung der wirkenden Kraft. Im folgenden sollen 2 Spezialfälle untersucht werden:

a) Bewegung eines Elektrons im elektrischen Längsfeld

Versuch:



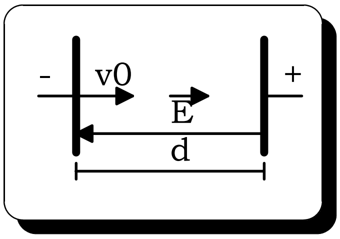
In einer Hochvakuumröhre werden aus einer Glühkathode Elektronen emittiert und auf eine durchbohrte Anode hin beschleunigt. Durchgelassene Elektronen fliegen auf ein Aluminiumkreuz. Auf dem Schirm erscheint der Schatten des von der Glühkathode beleuchteten Malteserkreuzes.

Es können folgende Fälle unterschieden werden:

1. Wird das Kreuz mit der Anode verbunden, so ist der Raum zwischen Anode und Kreuz praktisch feldfrei; auf dem Schirm erscheint eine scharfer "Elektronenschatten", der sich mit dem optischen Schatten deckt.
2. Wird das Kreuz isoliert, wird es von den auftreffenden Elektronen negativ aufgeladen und lenkt nachfolgende Elektronen seitlich ab. Auf dem Schirm erscheint ein vergrößerter Schatten.
3. Ist das Kreuz mit der Kathode verbunden, dann können die Elektronen nicht mehr gegen deren Potential anlaufen und kehren zur Anode zurück.

Die Energieänderung, die Elektronen in elektrischen Längsfeldern (Feldrichtung parallel zur Geschwindigkeitsrichtung) erfahren, lässt sich leicht auch berechnen:

Skizze:



Ein Elektron tauche mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 in einen Kondensator ein; Teilchengeschwindigkeit v_0 und Feldstärke E seien antiparallel, so dass das Elektron durch eine konstante Kraft F beschleunigt wird.
Im Feld erfährt das Elektron die Beschleunigung
$a = \frac{F}{m} = \frac{e \cdot E}{m} = \frac{e \cdot U}{m \cdot d}$.
Unter dem Einfluss der konstanten Kraft F beschreibt das Elektron eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung, die den Bewegungsgleichungen
$s(t)\ v_0 \cdot t + a/2 \cdot t^2$ und $v(t) = v_0 + a \cdot t$
gehorcht (mit Koordinatenursprung in der Mitte der linken Platte). Durchläuft das Elektron den ganzen Kondensator, so gilt

1. $d = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$ und
2. $v = v_0 + a \cdot t$.

Durch Auflösen der zweiten Gleichung und Einsetzen in die erste Gleichung lässt sich t eliminieren:
$t = \frac{v-v_0}{a} \Rightarrow d = v_0 \cdot \frac{v-v_0}{a} + \frac{a}{2} \cdot \frac{(v-v_0)^2}{a^2}$ bzw.
$d = v_0 \cdot \frac{v-v_0}{a} + \frac{(v-v_0)^2}{2 \cdot a}$ oder

$d = \frac{2 \cdot v \cdot v_0 - 2v_0^2 + v^2 - 2 \cdot v \cdot v_0 + v_0^2}{2 \cdot a}$.
Einsetzen des oben für a gewonnen Terms liefert

$d = \frac{v^2 - v_0^2}{2} \cdot \frac{m \cdot d}{e \cdot U}$.
Nach kürzen durch d und multiplizieren mit $e \cdot U$ erhält man
$e \cdot U = \frac{m}{2} \cdot (v^2 - v_0^2) = \frac{m}{2} \cdot v^2 - \frac{m}{2} \cdot v_0^2 = \Delta W_{kin}$
unabhängig von d!

Anmerkungen:

1. Ohne Beweis: Die letzte Gleichung ist in beliebigen Feldern gültig. Sie gilt analog auch beim Anlaufen eines Elektrons gegen ein Gegenfeld.
2. Dieser Vorgang ist dem vertikalen Wurf nach unten analog.

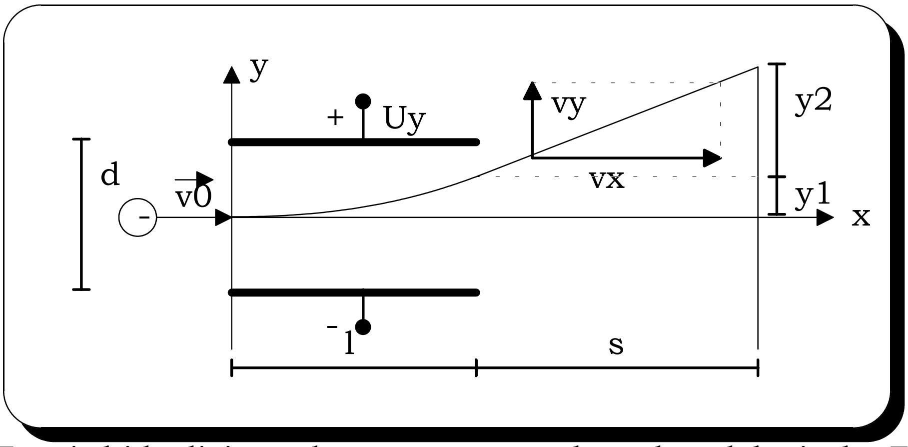
Zusammenfassung: Beim Durchlaufen einer Spannung U gewinnt (verliert) ein Elektron die kinetische Energie $\Delta W = e \cdot U$.

b) Bewegung eines Elektrons im elektrischen Querfeld

Versuch: Aus einer Glühkathode austretende Elektronen werden durch die Beschleunigungsspannung U_a auf die Geschwindigkeit v_0 beschleunigt. Danach treten sie in den Ablenkkondensator ein, dessen Feldstärke senkrecht auf der anfänglichen Geschwindigkeitsrichtung steht und werden dort abgelenkt. Damit die Elektronen hinter der durchbohrten Anode kräftefrei weiterfliegen können, ist das Anodenblech geerdet. Im Ablenkkondensator streift der Elektronenstrahl an einer Glimmerscheibe entlang, die mit einem fluoreszierenden Material überzogen ist, so dass die Bahn verfolgt werden kann.

Die Gesamtablenkung y_{ges} wird mit Hilfe der folgenden Skizze berechnet:

Prinzipskizze:



Es wird idealisierend angenommen, dass das elektrische Feld des Ablenkkondensators auf dessen Innenraum beschränkt bleibt. Dann kann der Flug der Elektronen nach dem Eintauchen in den Ablenkkondensator in zwei Phasen zerlegt werden: Innerhalb des Kondensators wird das Elektron gleichförmig nach oben beschleunigt, dahinter bewegt es sich geradlinig auf den angenommenen Auffangschirm zu.

Im Ablenkkondensator erfährt das Elektron die Beschleunigung
$a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{e \cdot E}{m} = \frac{e \cdot U_y}{d \cdot m} = \text{const}.$

Für eine derartige gleichmäßig beschleunigte Bewegung gelten die Bewegungsgleichungen
$v_y = a_y \cdot t$ und $y_1 = \frac{a_y}{2} \cdot t^2$.

Zum Durchfliegen des Kondensators brauchen die Elektronen die Zeit
$\frac{l}{t_1} = v_0 \Rightarrow t_1 = \frac{l}{v_0}$ bzw. $t_1^2 = \left(\frac{l}{v_0}\right)^2$.

v_0 lässt sich aus der Beschleunigungsspannung U_a leicht berechnen:
$\frac{m}{2} \cdot v_0^2 = e \cdot U_a \Rightarrow v_0^2 = \frac{2 \cdot e \cdot U_a}{m}$.

Für die Ablenkung y_1 innerhalb des Kondensators folgt daraus
$y_1 = \frac{e \cdot U_y}{2 \cdot d \cdot m} \cdot \left(\frac{l}{v_0}\right)^2 = \frac{e \cdot U_y}{2 \cdot d \cdot m} \cdot \frac{l^2 \cdot m}{2 \cdot e \cdot U_a}$ bzw.
$y_1 = \frac{l^2}{4 \cdot d} \cdot \frac{U_y}{U_a}$.

Anmerkung: Im Kondensator ($x \leq l$) gilt also
$y = C \cdot x^2$,
das Elektron beschreibt also eine Parabelbahn.

Nach dem Verlassen des Ablenkkondensators fliegen die Elektronen geradlinig weiter, so dass für y_2 gilt:
$y_2 = m \cdot x = m \cdot s$.

Die Steigung m lässt sich aus den Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_y oder (einfacher) aus der Steigung der Bahnkurve y = f(x) (im Kondensator) berechnen:

$m = y'(l) = \frac{1}{2 \cdot d} \cdot \frac{U_y}{U_a}$.

Daraus folgt für y_2

$y_2 = \frac{1}{2 \cdot d} \cdot \frac{U_y}{U_a} \cdot s = \frac{l \cdot s}{2 \cdot d} \cdot \frac{U_y}{U_a}$.

Die Gesamtablenkung y_{ges} ergibt sich schließlich zu

$y_{ges} = y_1 + y_2 = \frac{l^2}{4 \cdot d} \cdot \frac{U_y}{U_a} + \frac{l \cdot s}{2 \cdot d} \cdot \frac{U_y}{U_a} = \frac{l}{2 \cdot d} \cdot \left(\frac{l}{2} + s\right) \cdot \frac{U_y}{U_a}$.

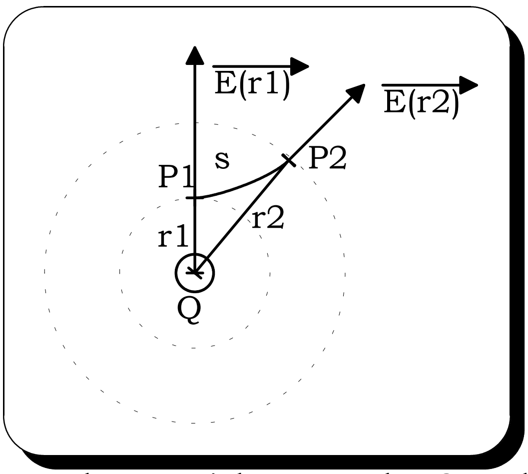
Folgerungen:

1. Die Gesamtablenkung y_{ges} ist bei konstanter Geometrie und konstanter Beschleunigungsspannung U_a proportional zur Ablenkspannung U_y. Im Oszillographen wird dies angewandt: Dort werden Spannungen durch die Ablenkung von Elektronen beim Durchfliegen eines Kondensators gemessen. Legt man zusätzlich eine sog. Kippspannung an die Horizontalablenkplatten des Oszillographen, so erhält man auf dem Leuchtschirm unmittelbar den Graphen von U(t).
2. Die Gesamtablenkung y_{ges} hängt nicht von der sog. spezifischen Ladung e/m ab; deren Wert kann somit mit diesem Experiment nicht bestimmt werden.
3. Die Bewegung geladener Teilchen im elektrischen Querfeld hat im horizontalen Wurf ihr mechanisches Analogon.

Bewegung in Zentralfeldern

Im Radialfeld z. B. um eine Punktladung Q gelten für die Feldstärke E und das Potential Φ (bei unendlich fernem Bezugspunkt) die Gleichungen

$E(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}$ und $\Phi(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r}$.



Zwar lassen sich wegen der Ortsabhängigkeit der Beschleunigung a die Bewegungsgleichungen nicht leicht aufstellen, doch mit Hilfe der Erhaltungssätze gelingt die Berechnung wichtiger Größen:

Um z. B. die Geschwindigkeit im Punkt P_2 einer im Punkt P_1 ruhenden Probeladung Q_p gleichen Ladungsvorzeichens zu berechnen, lässt sich der Energiesatz anwenden:

$\Delta W_{pot} = \Delta W_{kin} \Rightarrow \frac{Q_p \cdot Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{m_p}{2} \cdot v^2$ bzw.

$v = \sqrt{\frac{Q_p \cdot Q \cdot 2}{m_p \cdot 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$.

Anmerkung:
Die Bewegung geladener Teilchen im Zentralfeld um Punktladungen hat ihr mechanisches Analogon in der Bewegung von Massenpunkten im Zentralfeld z. B. von Planeten.