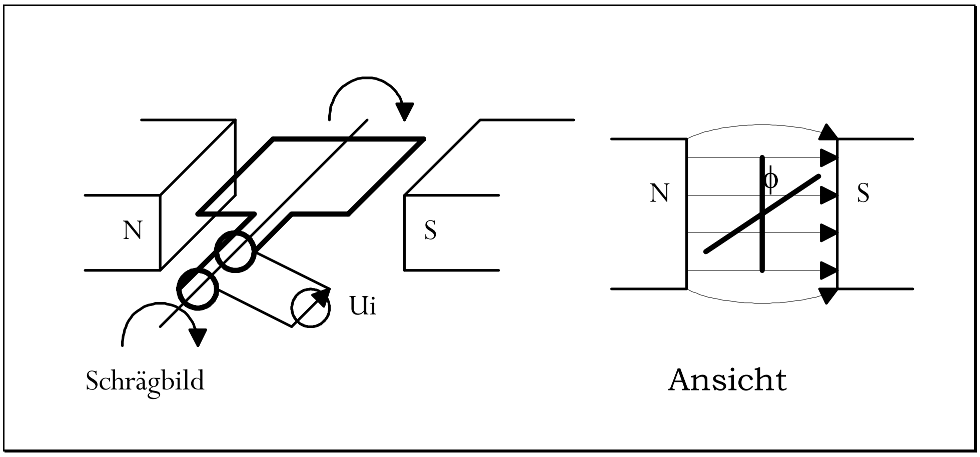
1.2.7 Erzeugung einer sinusförmigen Wechselspannung; Effektivwerte und Scheitelwerte von Stromstärke und Spannung

Erzeugung sinusförmiger Wechselspannung

Das Induktionsgesetz lehrt, dass die Induktionsspannung proportional zur zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses ist. Eine besondere Form der zeitlichen Abhängigkeit zeigt sich, wenn eine Induktionsspule in einem homogenen Magnetfeld rotiert:

Versuch:



Eine rechteckige Spule mit dem Flächennhalt A_0 und n_i Windungen rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in einem homogenen Magnetfeld der Flussdichte B um eine Achse senkrecht zu den magnetischen Feldlinien. Die in der Spule induzierte Spannung wird zwei mitrotierenden Schleifringen zugeführt. Zwei Kohlestäbe nehmen die Spannung ab und führen sie einem Oszillographen zu, der ihren zeitlichen Verlauf anzeigt.
Ergebnis: Es entsteht eine sinusförmige Wechselspannung.
Erklärung: Der zeitliche Verlauf der Induktionsspannung U kann unter Verwendung der obigen Skizze mit Hilfe des Induktionsgesetzes aus dem magnetischen Fluss berechnet werden.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit: Zur Zeit $t = 0$ soll die Fläche A_0 senkrecht auf den magnetischen Feldlinien stehen; dann gilt für den magnetischen Fluss Φ zu beliebigen späteren Zeitpunkten:
$\Phi(t) = B \cdot A_0 \cdot \cos(\phi) = B \cdot A_0 \cdot \cos(\omega t)$.

Für die Induktionsspannung U folgt dann:
$U(t) = -n_i \cdot \frac{d\Phi}{dt} = -n_i \cdot \frac{d(B \cdot A_0 \cdot \cos(\omega t))}{dt}$ bzw.
$U(t) = -n_i \cdot \omega \cdot B \cdot A_0 \cdot (-\sin(\omega t))$.
Geeignetes Zusammenfassen der Konstanten liefert schließlich
$U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)$ mit $U_0 = n \cdot \omega \cdot B \cdot A_0$.

Zusammenfassung: Rotiert eine Spule mit der Querschnittsfläche A_0 und n_i Windungen in einem homogenen Magnetfeld der Flussdichte B, dann entsteht die sinusförmige Wechselspannung $U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)$ mit der Kreisfrequenz $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$ und der Scheitelspannung $U_0 = n_i \cdot \omega \cdot B \cdot A_0$.

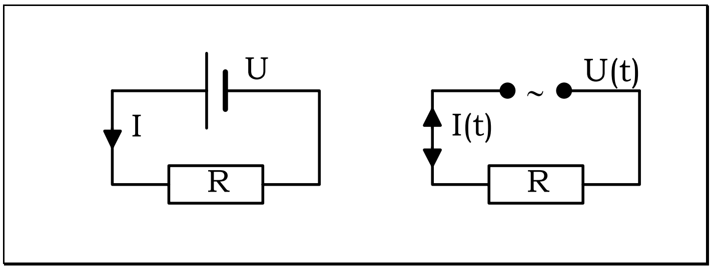
Effektivwerte von Stromstärke und Spannung

Das Problem beim Vergleich von Wechsel- und Gleichströmen liegt darin, dass Größen wie Stromstärke, Spannung Arbeit und Leistung im Wechselstromkreis zeitabhängig sind. Eine Vergleichsmöglichkeit bieten die sog. Effektivwerte. Für die Spannung gilt zum Beispiel:

Definition: Der Effektivwert U_{eff} einer Wechselspannung U(t) gibt diejenige Gleichspannung U_{eff} an, die über volle Perioden im selben Widerstand die gleiche mittlere Leistung hervorruft.

Dass die üblichen Wechselstrommeßgeräte auf Effektivwerte (und nicht auf Scheitelwerte) geeicht sind, zeigt der folgende Versuch:

Versuch:



Eine Glühlampe liegt einmal an einer Gleichspannung von 220 V und einmal an einer Wechselspannung von "220 V". Ihre Wärmeleistung wird mit einer Thermosäule mit nachgeschaltetem Verstärker gemessen.
Ergebnis: Beide Male erbringt die Lampe dieselbe mittlere Leistung, d. h. der Effektivwert der Wechselspannung beträgt tatsächlich 220 V.

Der Zusammenhang zwischen Effektivwert einer Wechselspannung und ihrem Scheitelwert kann über die mittlere Leistung berechnet werden, die ein Wechselstrom an einem ohmschen Widerstand R erbringt.

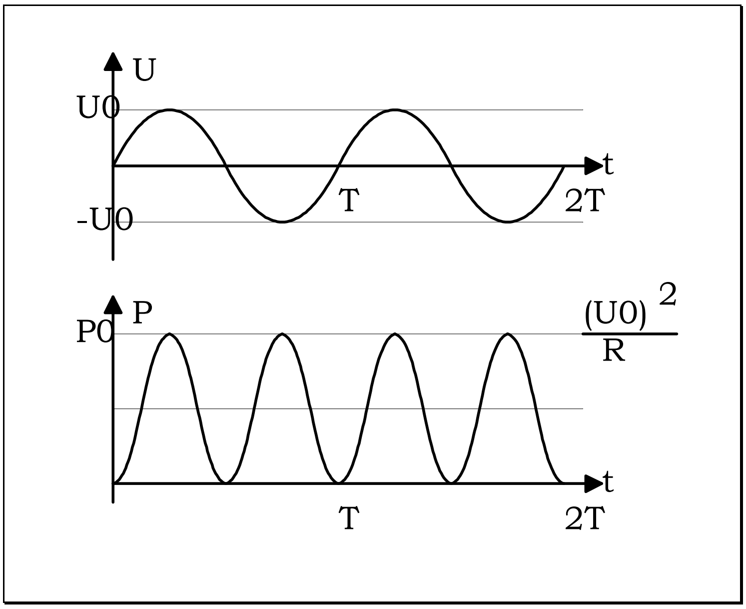
Im folgenden soll dieser Zusammenhang für einen sinusförmigen Wechselstrom hergeleitet werden.
Auf Grund des Ohmschen Gesetzes gilt für die Stromstärke I im rein ohmschen Kreis

$I(t) = \frac{U(t)}{R} = \frac{U_0 \cdot \sin(\omega t)}{R} = I_0 \cdot \sin(\omega t)$.

Daraus folgt für die Momentanleistung P_{mom}

$P_{mom} = U_{mom} \cdot I_{mom} = U_0 \cdot \sin(\omega t) \cdot I_0 \cdot \sin(\omega t) = U_0 \cdot I_0 \cdot (\sin(\omega t))^2$.

Die mittlere Leistung P_{mittl} kann mit Hilfe der folgenden Skizze leicht verstanden werden:
Skizze:



Rechnerisch erhält man P_{mittl} als Quotient aus Stromarbeit über eine volle Periode und Periodendauer T:

$$P_{mittl} = \frac{W_{Periode}}{T} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T U(t) \cdot I(t)dt \quad .$$

Für die Arbeit während einer Periode folgt mit Hilfe der trigonometrischen Beziehung

$$(\sin(\omega t))^2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2\omega t))$$

$$W = \int_0^T U_0 \cdot I_0 \cdot (\sin(\omega t))^2 dt = \frac{1}{2} \cdot U_0 \cdot I_0 \cdot \int_0^T (\sin(\omega t))^2 dt = \frac{1}{2} \cdot U_0 \cdot I_0 \cdot \int_0^T (1 - \cos(2\omega t))dt$$

bzw. nach Trennung des Integranden

$$W = \frac{1}{2} \cdot U_0 \cdot I_0 \cdot \int_0^T dt - \frac{1}{2} \cdot U_0 \cdot I_0 \cdot \int_0^T \cos(2\omega t)dt$$ oder

$$W = \frac{1}{2} \cdot U_0 \cdot I_0 \cdot [t]_0^T - \frac{1}{2} \cdot U_0 \cdot I_0 \cdot \left[\frac{\sin(2\frac{2\pi}{T}t)}{2\frac{2\pi}{T}} \right]_0^T \quad .$$

Einsetzen der Integrationsgrenzen liefert für W unmittelbar

$$W = \frac{U_0 \cdot I_0 \cdot T}{2} \, ,$$

woraus für die mittlere Leistung sofort

$P_{mittl} = \frac{U_0 \cdot I_0}{2}$ bzw. $P_{mittl} = \frac{R \cdot I_0^2}{2}$ folgt.

Eine Gleichspannung U_{eff} liefert im selben Stromkreis die (konstante) Leistung

$P_{eff} = U_{eff} \cdot I_{eff} = R \cdot I_{eff}^2$.

Nach der oben ausgesprochenen Definition des Effektivwerts gilt

$P_{eff} = P_{mittl}$,

woraus man die Gleichung

$R \cdot I_{eff}^2 = \frac{R \cdot I_0^2}{2}$ bzw. $I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$

erhält. Durch einfache Umstellungen ergibt sich auch

$$U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad .$$

Zusammenfassung: Der Effektivwert U_{eff} einer sinusförmigen Wechselspannung $U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)$ mit dem Scheitelwert U_0 ist $U_{eff} = U_0 : \sqrt{2}$. Ebenso gilt $I_{eff} = I_0 : \sqrt{2}$.

Anmerkung:
Jede (periodische) Kurvenform hat ihren Effektivwert, den man in jedem Fall aus $P_{eff} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T P(t)dt$ berechnen kann.