1.2.9 Magnetisches Feld als Träger magnetischer Energie; Energiedichte des magnetischen Feldes

Energie des Magnetfeldes

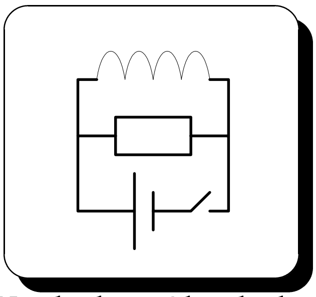
Beim Abschalten der äußeren Spannung in einem Parallelkreis aus Spule und Widerstand fließt ein Strom ohne äußere Spannung noch einige Zeit weiter und erzeugt im ohmschen Widerstand Wärme. Diese freiwerdende Energie muss vorher im Magnetfeld gespeichert gewesen sein.

Die Größe der gespeicherten Energie im Magnetfeld kann durch die beim Abklingen freiwerdende Energie W berechnet werden. Dabei ist zu beachten, dass wegen der variablen Größen U und I ein Integral mit den Integralgrenzen 0 (Beginn des Ausschaltens) und ∞ (Ende der asymptotischen Entladung) zu bilden ist:

$$W = \int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty U(t) \cdot I(t)dt = \int_0^\infty (-L \cdot \dot{I} \cdot I)dt.$$

Das Integral lässt sich ausführen, wenn der funktionale Zusammenhang zwischen I und t bekannt ist. Für den Ausschaltvorgang gilt folgende Überlegung (vgl. letztes Kapitel):

Skizze:



Nach dem Abschalten der äußeren Spannung ist der Strom bestimmt durch die Differentialgleichung

$R \cdot I = U_{ind} = -L \cdot \frac{dI}{dt}$ bzw.

$\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{R}{L} \cdot I(t).$

Diese Differentialgleichung kann nach Trennung der Variablen oder durch folgende Überlegung gelöst werden: Die erste Ableitung von I ist mit Ausnahme des Vorzeichens in jedem Moment proportional zu I, sie reproduziert sich also im Wesentlichen beim Ableiten. Eine Funktion mit dieser Eigenschaft ist

$I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$ mit $I_0 = I(t = 0)$,

wie man durch Bildung der ersten Ableitung

$\frac{dI}{dt} = I_0 \cdot (-\frac{R}{L}) \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$

und Einsetzen in die Differentialgleichung leicht bestätigen kann.

Daraus folgt

$W = \int_0^\infty \left(-L \cdot (-\frac{R}{L}) \cdot I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \cdot I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right) dt = R \cdot I_0^2 \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{2R}{L} \cdot t} dt$ bzw.
$W = R \cdot I_0^2 \cdot \left[-\frac{L}{2R} \cdot e^{-\frac{2R}{L} \cdot t}\right]_0^\infty = R \cdot I_0^2 \cdot \frac{L}{2R} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_0^2.$

Zusammenfassung: Ein magnetisches Feld enthält Energie. Fließt durch eine Spule mit der Eigeninduktivität L der Strom I, dann ist in ihrem Magnetfeld die Energie W gespeichert:
$W = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2.$

Anmerkung:
Die Energie des Magnetfeldes lässt sich durch Anwendung der Kettenregel auch ohne Kenntnis des funktionalen Zusammenhangs zwischen I und t ermitteln:
Mit dem Integral
$W = \int_0^\infty (-L \cdot \dot{I} \cdot I) dt = \int_\infty^0 (L \cdot \dot{I} \cdot I) dt$
wird eine Stammfunktion F(t) gesucht, deren Ableitung
$L \cdot I \cdot \frac{dI}{dt}$
liefert. Mit der Kettenregel ist leicht nachzuprüfen, dass
$F(t) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I(t)^2$
eine Stammfunktion F(t) ist.

Energiedichte des magnetischen Feldes

Für den Fall eines langgestreckten Luftspule mit dem Volumen $V = A \cdot l$ lässt sich die Energie ihres Magnetfeldes aus ihren geometrischen Daten berechnen und auf Feldgrößen
$B = \mu_0 \cdot H$ mit $H = \frac{n \cdot I}{l}$
zurückführen:
$W = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 = \frac{1}{2} \cdot \mu_0 \cdot n^2 \cdot \frac{A}{l} \cdot I^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{n \cdot I}{l} \cdot \frac{n \cdot I}{l} \cdot A \cdot l = \frac{1}{2} \cdot B \cdot H \cdot V.$
Für die Energiedichte w gilt im homogenen Feld
$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \cdot B \cdot H.$
Ohne Beweis: Die letzte Gleichung gilt auch in inhomogenen Feldern.

Zusammenfassung: Für die Energiedichte w in beliebigen Feldern gilt
$w = \frac{1}{2} \cdot B \cdot H$ und $W = \int w dV.$