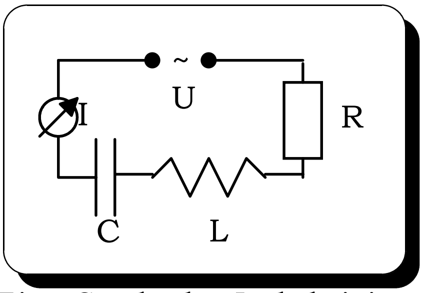
2.1.2 Elektromagnetischer Schwingkreis; Thomson-Gleichung

Vorbemerkungen

Bei einer Spule steigt der Blindwiderstand $R_L = \omega L$ mit wachsender Frequenz an, beim Kondensator dagegen sinkt $R_C = \frac{1}{\omega C}$ ab. In der Spule hinkt der Strom der anliegenden Spannung nach, im Kondensator eilt er voraus. Am ohmschen Widerstand R gibt es keine Phasenverschiebung.
In den folgenden Versuchen soll gezeigt werden, wie sich eine Serien- bzw. eine Parallelschaltung von Spule und Kondensator auf den Strom im Kreis auswirkt.

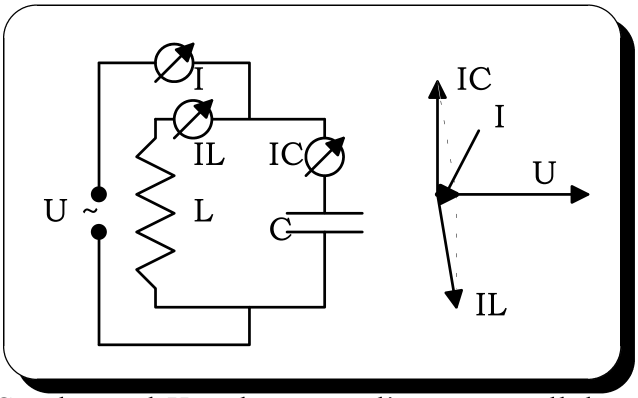
Versuch 1:



Eine Spule der Induktivität L, ein Kondensator der Kapazität C und ein ohmscher Widerstand R liegen in Serie an einem Sinusgenerator. Zur Registrierung des Stroms dient ein Amperemeter bzw. der Spannungsabfall am Widerstand.
Ergebnisse: Bei einer ganz bestimmten Frequenz f_r ist die Stromstärke maximal, die Phasendifferenz zwischen Strom und Spannung gleich Null (Serienresonanz). Für die Frequenz f_r gilt
$f_r = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}}$.
Auswertung: Für den sog. Scheinwiderstand Z bei der Serienschaltung gilt (ohne Beweis)
$Z = \sqrt{R^2 + (\omega \cdot L - \frac{1}{\omega\cdot C})^2}$.
Daraus folgt ein Maximum des Effektivwertes der Stromstärke genau dann, wenn
$\omega \cdot L - \frac{1}{\omega\cdot C} = 0$
ist. Dies ist der Fall für
$\omega = \sqrt{\frac{1}{L\cdot C}}$.

Anwendung: Die Kombination aus in Serie geschalteter Induktivität und Kapazität ist dazu geeignet, eine bestimmte Frequenz bzw. ein enges Frequenzband bevorzugt durchzulassen (Siebkette).

Versuch 2:



Spule und Kondensator liegen parallel am Sinusgenerator. In der Zuleitung und in den einzelnen Zweigen liegen Amperemeter.
Ergebnisse: Bei der Resonanzfrequenz f_r von oben sinkt der Strom in den Zuleitungen fast auf Null, in den einzelnen Zweigen ist er etwa gleich groß (Parallelresonanz).
Erklärung: In den einzelnen Zweigen fließen (bei Vernachlässigung des ohmschen Widerstandes der Spule) folgende Ströme:
$I_L = \frac{U_0}{\omega \cdot L} \cdot \sin(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2})$ und
$I_C = U_0 \cdot \omega \cdot C \cdot \sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2})$.
Für den Fall vernachlässigbaren ohmschen Widerstandes sind die beiden Teilströme um 180^0 in der Phase verschieden und im Resonanzfall gleich groß. Die Summe der beiden Ströme (= Strom in den Zuleitungen) ist dann gleich Null!
In der Realität erreicht dagegen der Strom in den Zuleitungen wegen des immer vorhandenen Widerstandes im Resonanzfall lediglich ein Minimum.

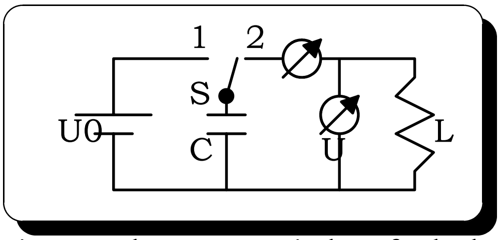
Anmerkungen:
1. Dieses Schaltelement stellt für Wechselstrom der Resonanzfrequenz f_r einen unendlich großen Widerstand dar, sperrt also diese Frequenz (Sperrkreis!).
2. Dieser letzte Versuch ist mit der Anregung eines Federpendels zu erzwungenen Schwingungen vergleichbar.

Elektromagnetischer Schwingkreis

Im letzten Versuch pendeln die Leitungselektronen im Resonanzfall zwischen den Kondensatorplatten hin und her, ohne dass in den Zuleitungen ein nennenswerter Strom fließt. Es werden dabei elektrische und magnetische Felder periodisch auf- und abgebaut. Dieser Vorgang hat sein mechanisches Analogon in der freien mechanischen Schwingung, bei der sich potentielle und kinetische Energie periodisch ineinander umwandeln.

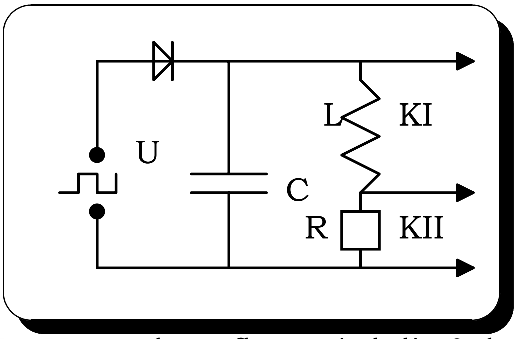
Es liegt nahe, die Verhältnisse auch auf die Parallelschaltung von Kondensator und Spule zu übertragen, sind doch ein geladener Kondensator und eine stromdurchflossene Spule Speicher für elektrische bzw. magnetische Energie. Es soll daher untersucht werden, ob ein System aus Kondensator

und Spule, einmal angeregt, zu elektromagnetischen Schwingungen fähig ist.
Versuch:



Ein Kondensator wird aufgeladen und über die Spule hoher Induktivität entladen.
Ergebnis: Das im Stromkreis befindliche Amperemeter zeigt einen Wechselstrom mit abnehmender Amplitude an. Der Spannungsmesser am Kondensator zeigt dasselbe Signal, das allerdings gegenüber dem Stromsignal um 90^0 phasenverschoben ist.

Im nächsten Versuch soll der zeitliche Verlauf von Strom und Spannung mit dem Oszillographen untersucht werden:
Versuch:



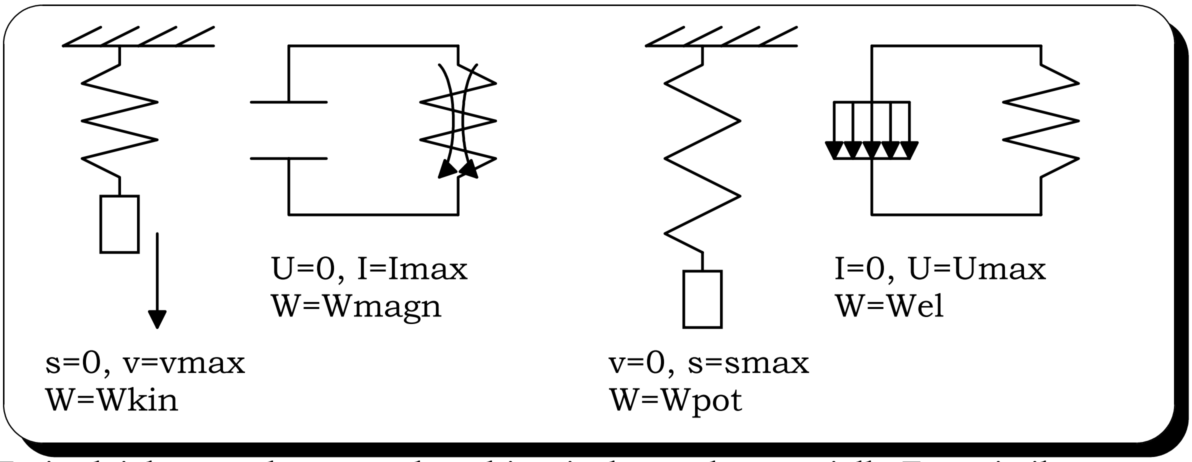
Im Versuchsaufbau wird die Schaltung gegenüber dem Eingangsversuch modifiziert: Der mechanische Schalter wird durch einen periodischen Schalter ersetzt (Rechteckgenerator mit Diode), und statt des Amperemeters befindet sich ein kleiner Widerstand im Schwingkreis, dessen Spannungsabfall ein Maß für den Strom ist.
Ergebnis: Auf dem Oszillographenschirm erscheint das Bild zweier um $\pi/2$ phasenverschobener gedämpfter Sinusschwingungen mit gleicher Schwingungsdauer.

Versuch: In obigem Versuchsaufbau werden sukzessive R, L und C variiert und die Änderungen auf die Schwingungen beobachtet.
Ergebnisse: Eine Erhöhung des ohmschen Widerstands R bewirkt eine stärkere Dämpfung der Schwingung, während eine Erhöhung der Induktivität L und/oder der Kapazität C die Schwingungsdauer ebenfalls erhöht.

Zusammenfassung: In einer Parallelschaltung von Spule und Kondensator treten nach einmaliger Energiezufuhr freie gedämpfte elektromagnetische Schwingungen auf. Diese Schaltung heißt geschlossener elektromagnetischer Schwingkreis.

Vergleich von mechanischer und elektrischer Schwingung

Der elektrische Schwingkreis lässt sich sehr gut mit einem mechanischen schwingungsfähigen System, etwa einem Federpendel, vergleichen. Zur Vereinfachung seien beide Systeme als ungedämpft angenommen.
In den folgenden Skizzen sind die vergleichbaren Situationen nebeneinander gezeichnet:



Es ist leicht zu erkennen, dass kinetische und potentielle Energie ihr Analogon in magnetischer und elektrischer Energie haben, die periodisch ineinander übergehen.

Differentialgleichung der freien ungedämpften elektrischen Schwingung; Thomsonsche Schwingungsformel

Diese qualitativen Analogien lassen sich auch auf quantitative Ergebnisse ausdehnen:
Bei der Dehnung einer elastischen Feder gehorcht die rücktreibende Kraft F bei der Auslenkung x aus der Ruhelage der Gleichung
$F = -D \cdot x$,
wobei D die Federkonstante ist. Mit dem zweiten Newtonschen Gesetz
$F = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$
folgt daraus sofort die Differentialgleichung
$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -D \cdot x$ bzw.
$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\frac{D}{m} \cdot x$
als Differentialgleichung der freien harmonischen mechanischen Schwingung.

Für die elektrische Schwingung folgt bei Vernachlässigung des ohmschen Widerstands R eine gleich gebaute Differentialgleichung. Es liegt in jedem Augenblick an Spule und Kondensator dieselbe Spannung:
$U_L = U_C \Leftrightarrow \frac{Q}{C} = -L \cdot \frac{dI}{dt}$.
Auf der rechten Gleichungsseite gilt wegen
$I = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2}$,

und für die Differentialgleichung folgt schließlich
$\frac{d^2Q}{dt^2} = \ddot{Q} = -\frac{1}{LC} \cdot Q.$
Dies ist eine Gleichung desselben Typs wie bei der freien ungedämpften mechanischen Schwingung; beide Gleichungen lassen denselben Lösungsansatz zu:
$Q(t) = Q_0 \cdot \sin(\omega t + \phi)$.
Die Gültigkeit dieses Ansatzes prüft man durch Bilden der Ableitungen und Einsetzen in die Differentialgleichung nach. Für die Ableitungen gilt
$\frac{dQ}{dt} = \omega \cdot Q_0 \cdot \cos(\omega t + \phi)$ und
$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\omega^2 \cdot Q_0 \cdot \sin(\omega t + \phi)$.
Einsetzen in die Ausgangsgleichung liefert
$-\omega^2 \cdot Q_0 \cdot \sin(\omega t + \phi) = -\frac{1}{LC} \cdot Q_0 \cdot \sin(\omega t + \phi)$.
Diese Gleichung ist - wie verlangt - für alle Zeiten gültig, wenn
$\omega^2 = \frac{1}{L \cdot C}$ bzw. $\omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$
gilt. Daraus folgt für die Schwingungsdauer wegen
$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$
sofort
$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}$.
Diese Gleichung heißt Thomsonsche Schwingungsformel für die Schwingungsdauer T einer ungedämpften elektrischen Schwingung.

Anmerkung:
Für gedämpfte Schwingungen gilt (ohne Beweis)
$\omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \frac{R^2}{4 \cdot L^2}}$.
Es ist leicht zu erkennen, dass daraus für R -> 0 die Thomsonsche Schwingungsformel folgt.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird üblicherweise verabredet, dass zur Zeit t = 0 der Kondensator voll aufgeladen sein soll (Randbedingung!).
Dann gilt
$U_C(t = 0) = U_0 = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot 0\ s + \phi)$
genau dann, wenn
$\sin(\phi) = 1$ bzw. $\phi = \frac{\pi}{2}$
gilt. Bereits weiter oben wurde festgestellt, dass
$\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \cos(\omega t)$
ist. Dann folgt schließlich für U und I
$U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t)$ und
$I(t) = -I_0 \cdot \sin(\omega t)$ mit $I_0 = \omega \cdot Q_0 = \frac{Q_0}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{C \cdot U_0}{\sqrt{L \cdot C}}$.

Energiebetrachtung bei ungedämpfter Schwingung

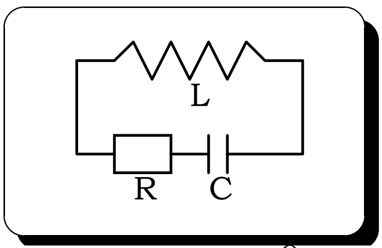
Im Schwingkreis wandeln sich elektrische und magnetische Feldenergie periodisch ineinander um. Die folgende Rechnung zeigt, dass dabei in jedem Augenblick die Energiesumme erhalten bleibt.

Gilt für die Spannung am Kondensator
$U_C = U_0 \cdot \cos(\omega t) = \frac{Q_0}{C} \cdot \cos(\omega t)$
und für den Stromverlauf
$I(t) = -I_0 \cdot \sin(\omega t) = -\omega \cdot Q_0 \cdot \sin(\omega t)$,
dann lässt sich die Gesamtenergie in jedem Moment aus der Summe der Einzelenergien leicht berechnen:
$W_{mag}(t) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_0^2 \cdot (\sin(\omega t))^2$
$W_{el}(t) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_0^2 \cdot (\cos(\omega t))^2$.
Wegen
$\frac{1}{2} \cdot L \cdot I_0^2 = \frac{1}{2} \cdot L \frac{C^2 \cdot U_0^2}{L \cdot C} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_0^2$
lässt sich für die Gesamtenergie schreiben:
$W_{ges} = W_{mag} + W_{el} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_0^2 \cdot ((\sin(\omega t))^2 + (\cos(\omega t))^2)$ bzw.
$W_{ges} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_0^2 = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_0^2$.

Zusammenfassung: In einem Schwingkreis wandeln sich elektrische und magnetische Energie periodisch ineinander um. Die Induktivität sei L; ist der ohmsche Widerstand R = 0 und wird der Kondensator der Kapazität C zu Beginn auf die Spannung U_0 geladen, so entsteht eine ungedämpfte Schwingung mit der Wechselspannung $U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t)$ und dem Wechselstrom $I(t) = -I_0 \cdot \sin(\omega t)$ mit $\omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$ und $I_0 = U_0 \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$. Die Periodendauer einer Schwingung ist $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}$.

Mathematische Behandlung der gedämpften elektrischen Schwingung

Die freie Schwingung eines realen elektrischen Schwingkreises verläuft wegen des ohmschen Widerstandes von Spule und Zuleitungen stets gedämpft. Dann liegt (vgl. Skizze) in jedem Augenblick die in der Spule induzierte Spannung an der Reihenschaltung von Kondensator und Widerstand:



$-L \cdot \frac{dI}{dt} = U_C + U_R = \frac{Q}{C} + R \cdot I$.
Diese Differentialgleichung kann umgeformt werden:
$\frac{dI}{dt} = -\frac{\frac{Q}{C} + R \cdot I}{L}$.
Zur numerischen Erfassung mit einem Computerprogramm setzt man
$\frac{dI}{dt} = \frac{\Delta I}{\Delta t}$.

Der dabei auftretende Fehler wird hinreichend klein, wenn nur Δt genügend klein ist. Dann folgt für ΔI

$$\Delta I = -\frac{\frac{Q}{C}+R\cdot I}{L}\cdot \Delta t.$$

Dabei bedeutet Q die momentan auf dem Kondensator sitzende Ladung, I die momentane Stromstärke; $\Delta t \ll T$ ist ein beliebig wählbarer Zeitabschnitt, ΔI der in der Zeit Δt erfolgte Zuwachs der Stromstärke.

Das Verfahren beruht auf folgender Idee: Es seien Stromstärke I_n und Kondensatorladung Q_n zur Zeit t_n bekannt. Dann beträgt im nächsten Zeitpunkt t_{n+1} die Stromstärke I_{n+1}

$I_{n+1} = I_n + \Delta I_n$,

wobei ΔI_n durch

$$\Delta I_n = -\frac{\frac{Q_n}{C}+R\cdot I_n}{L}\cdot \Delta t$$

beschrieben wird. Während Δt hat sich auch die Kondensatorladung um ΔQ_n geändert. Diese Änderung wird durch

$\Delta Q_n = I_{n+1} \cdot \Delta t$

angenähert; für Q_{n+1} folgt daraus

$Q_{n+1} = Q_n + \Delta Q_n$.

Damit sind Stromstärke I_{n+1} und Kondensatorladung Q_{n+1} zur Zeit t_{n+1} berechnet. Dieselben Überlegungen liefern dann sukzessive Ströme und Ladungen zu späteren Zeitpunkten.

Ein Beispiel: Ein Schwingkreis habe Elemente mit den Daten C = 200 µF, L = 500 H und R = 200 Ω. Der Kondensator werde zu Beginn mit der Spannung U_0 = 500 V geladen.
Die Anfangswerte sind dann $Q_0 = C \cdot U_0$ = 0,1 As und I_0 = 0 A.

Für die weiteren Q- und I-Werte ergibt sich die nachfolgende Tabelle, die zu dem unten stehenden Graphen führt:

t	delta(In)	In	Delta(Qn)
0	0	0	0,1
0,05	-0,05	-0,05	0,0975
0,1	-0,04775	-0,09775	0,0926125
0,15	-0,04435125	-0,14210125	0,085507438
0,2	-0,039911694	-0,182012944	0,07640679
0,25	-0,034563136	-0,21657608	0,065577986
0,3	-0,028457472	-0,245033552	0,053326309
0,35	-0,021762483	-0,266796035	0,039986507
0,4	-0,014657333	-0,281453368	0,025913839
0,45	-0,007327852	-0,28878122	0,011474778
0,5	3,82356E-05	-0,288742984	-0,002962372
0,55	0,007256045	-0,281486939	-0,017036719
0,6	0,014148098	-0,267338841	-0,030403661

0,65	0,020548607	-0,246790233	-0,042743172
0,7	0,026307391	-0,220482843	-0,053767314
0,75	0,031293314	-0,189189529	-0,063226791
0,8	0,035397186	-0,153792343	-0,070916408
0,85	0,038534051	-0,115258292	-0,076679323
0,9	0,040644827	-0,074613465	-0,080409996
0,95	0,041697267	-0,032916198	-0,082055806