3.2 Relativistische Mechanik

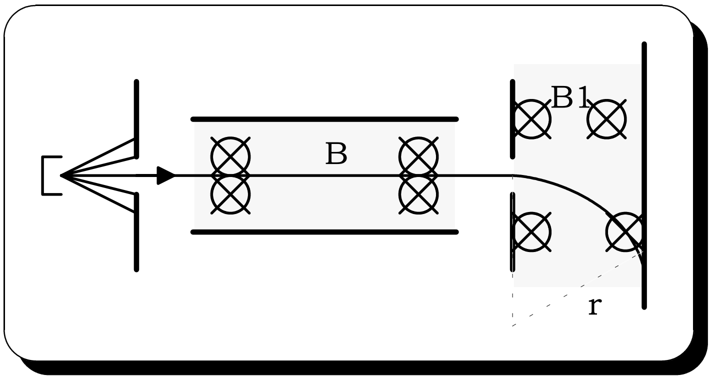
3.2.1 Relativistischer Impuls; Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit

Die Versuche von Kaufmann und Bucherer

Einstein wies in seiner Theorie nach, dass neben dem ungewohnten Verhalten von Längen und Zeitintervallen (Längenkontraktion, Zeitdilatation) auch die Masse m eines Körpers keinen festen Wert hat, sondern geschwindigkeitsabhängig ist.

Einen Beleg dafür liefern die 1901 bis 1908 von Kaufmann und Bucherer durchgeführten Versuche über die spezifische Ladung $\frac{e}{m}$ von Elektronen.

Skizze:



Aus einem Strahl schneller Elektronen aus einem radioaktiven β-Strahler werden mit einem Geschwindigkeitsfilter solche ausgesondert, die den Filter unabgelenkt durchqueren, weil für sie stets $F_e = F_{magn}$ gilt. Diese Elektronen tauchen in ein weiteres Magnetfeld B´ ein und werden dort auf eine Kreisbahn gezwungen. Aus dem Radius r der Kreisbahn kann e/m berechnet werden:

$e \cdot E = e \cdot v \cdot B \Rightarrow v = \frac{E}{B}$;

$e \cdot v \cdot B_1 = m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow \frac{e}{m} = \frac{v}{B_1 \cdot r}$ bzw.

$\frac{e}{m} = \frac{E}{B_1 \cdot B \cdot r}$.

Auswertung: e/m ist nicht konstant, sondern wird mit zunehmender Geschwindigkeit immer kleiner.

Kaufmann und Bucherer werteten ihre Versuche unter der Voraussetzung aus, dass die Ladung der Elektronen konstant bleibt. Dann gehorcht die Masse in sehr guter Näherung der Gleichung

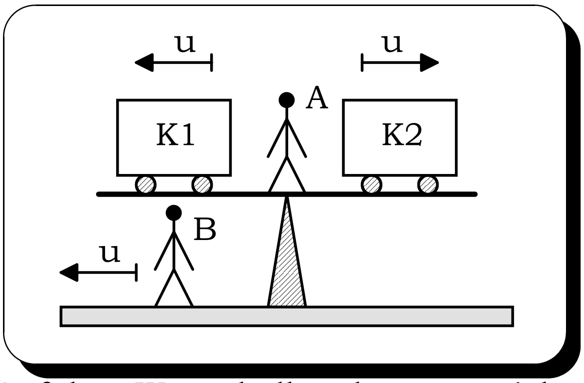
$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$

mit der "Ruhemasse" m_0 und $\beta = \frac{v^2}{c^2}$.

Die relativistische Massenformel

Zur Herleitung von m(v) dient das folgende

Gedankenexperiment:



Auf dem Waagebalken bewegen sich zwei identische Körper K_1 und K_2 mit der Geschwindigkeit u relativ zum Beobachter A so nach außen, dass die Waage im Gleichgewicht bleibt. Der Beobachter B bewege sich mit der Geschwindigkeit u nach links und bleibt damit stets unter dem Körper K_1. Der Start der beiden Körper in der Mitte der Waage sollt zur B-Zeit $t_B = 0$ erfolgt sein. Die Relativgeschwindigkeit zwischen dem Körper K_2 und dem Beobachter B werde mit v bezeichnet.

Für den Beobachter B stellt sich der Sachverhalt nach der Zeit t_B folgendermaßen dar:

	K_1	K_2
|Geschwindigkeit|	0	v
Masse	m_0	m(v)
Hebelarm	$u \cdot t_B$	$v \cdot t_B - u \cdot t_B$

Beide Beobachter sind Inertialbeobachter, für beide gilt somit nach dem allgemeinen Relativitätsprinzip das Hebelgesetz. Für den Beobachter B ergibt sich mit den Werten der Tabelle das Hebelgesetz wie folgt:
(I) $m_0 \cdot g \cdot u \cdot t_B = m(v) \cdot g \cdot (v \cdot t_B - u \cdot t_B)$.

Für die Geschwindigkeit v des Körpers K_2 relativ zum Beobachter B in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit u von K_2 relativ zur Waage und der Geschwindigkeit u der Waage relativ zum Beobachter B gilt (ohne Beweis) das Relativitätstheorem
(II) $v = \frac{u+u}{1+\frac{u \cdot u}{c^2}}$.
Aus Gleichung I folgt
$m_0 \cdot u = m(v) \cdot (v - u)$ bzw. $m_0 \cdot \frac{v-u}{u}$.
Aus Gleichung II lässt sich $\frac{v-u}{u}$ ersetzen:
$v = \frac{2uc^2}{c^2+u^2}$ bzw.

$vc^2 + vu^2 = 2uc^2$
$v^2c^2 - 2uvc^2 = -v^2u^2$
$v^2c^2 - 2uvc^2 + u^2c^2 = u^2c^2 - v^2u^2$
$(v-u)^2c^2 = (c^2 - v^2)u^2$
$\frac{(v-u)^2}{c^2} = \frac{c^2-v^2}{c^2}$
$\frac{v-u}{c} = \sqrt{\frac{c^2-v^2}{v^2}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.
Oben eingesetzt erhält man
$m_0 = m(v) \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ bzw.
$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Zusammenfassung: Die bewegte Masse m(v) wird beschrieben durch $m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. m(v) ist die relativistische Masse, m_0 die für kleine Geschwindigkeiten gültige Ruhemasse.

Folgerungen:

1. Mit dem Term für die relativistische Masse nimmt auch die Gleichung für den Impuls p eine neue Form an: $p(v) = m(v) \cdot v = \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.
2. Mit dem relativistischen Impuls bleibt der Impulserhaltungssatz auch bei hohen Geschwindigkeiten gültig.