3.2.2 Äquivalenz von Masse und Energie; relativistische Impuls-Energie-Beziehung

Äquivalenz von Masse und Energie

Wenn sich die Masse mit zunehmender Geschwindigkeit ebenfalls ändert, dann muss die Newtonsche Bewegungsgleichung in der Form
$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(m\cdot v)}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot v + m \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{dm}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} \cdot v + m \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{dm}{dv} \cdot \dot{v} \cdot v + m \cdot \dot{v}$ bzw.
$F = \left(\frac{dm}{dv} \cdot v + m\right) \cdot \dot{v}$
geschrieben werden.

Den folgenden Überlegungen werden nur die beiden Beziehungen
$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ und $F = \frac{d(m\cdot v)}{dt}$
zugrunde gelegt. Außerdem soll der Energieerhaltungssatz in der Form verwendet werden, dass die an einem Körper verrichtete Beschleunigungsarbeit als kinetische Energie des Körpers erhalten bleibt.

Dann gilt

$$E_{kin} = \int_0^s F \cdot ds = \int_0^s \frac{d(m\cdot v)}{dt} ds = \int_0^s \left(\frac{dm}{dv} \cdot v + m\right) \cdot \dot{v} \cdot ds = \int_0^t \left(\frac{dm}{dv} \cdot v + m\right) \cdot \dot{v} \cdot v \cdot dt$$

$$E_{kin} = \int_0^t \left(\frac{dm}{dv} \cdot v + m\right) \cdot \frac{dv}{dt} \cdot v \cdot dt = \int_0^v \left(\frac{dm}{dv} \cdot v + m\right) \cdot v \cdot dv$$

$$E_{kin} = \int_0^v \left(\frac{m_0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2v}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot v + \frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \right) \cdot v \cdot dv$$

$$E_{kin} = \int_0^v \left(\frac{m_0 \cdot \frac{v^3}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{m_0 \cdot v \cdot \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right) dv$$

$$E_{kin} = \int_0^v \left(\frac{m_0 \cdot \frac{v^3}{c^2} + m_0 \cdot v - m_0 \cdot \frac{v^3}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right) dv = \int_0^v \frac{m_0 \cdot v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} dv = \left[\frac{m_0 \cdot c^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} \right]_0^v$$

$$E_{kin} = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 \cdot c^2,$$

also
$E_{kin} = m \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2 = (m - m_0) \cdot c^2$.
Bei anderer Anordnung ergibt sich

$m \cdot c^2$	$= E_{kin}$	$+ m_0 \cdot c^2$ bzw.
Gesamtenergie	= kinetische Energie	+ Ruheenergie .

Zusammenfassung: Jeder Energie ist eine Masse zugeordnet: $E = m \cdot c^2$.
Der Ruhemasse m_0 eines Körpers muss die Ruheenergie $m_0 \cdot c^2$ zugeordnet werden.

Anmerkung:

Die klassische Formel $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ für die kinetische Energie folgt aus dem relativistischen Energieterm für kleine Geschwindigkeiten, wenn man die Näherung

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2}$$

für kleine Geschwindigkeiten v << c verwendet (lineare Approximation). Dann gilt

$$E_{kin} = (m - m_0) \cdot c^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \cdot m_0 c^2 \approx \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} - 1\right) \cdot m_0 c^2 = \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot v^2.$$

Relativistische Energie-Impuls-Beziehung

Gelegentlich ist es experimentell einfacher, den Impuls p eines Teilchens zu messen als seine Energie. Zum Beispiel kann aus der Beugung von Elementarteilchen die Wellenlänge der zugehörigen Materiewelle und daraus der Impuls p bestimmt werden. Um dann indirekt doch eine Aussage über die Energie W zu erhalten, kann man sich der nachfolgenden Umformung bedienen.

Aus $p = m \cdot v^2$ und $E = m \cdot c^2$ folgt:

$$E^2 - p^2 \cdot c^2 = m^2 \cdot c^4 - m^2 \cdot v^2 \cdot c^2 = m^2 \cdot c^4 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{m_0^2 \cdot c^4}{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$E^2 - p^2 \cdot c^2 = m_0^2 \cdot c^4 = E_0^2.$$

Zusammenfassung: Zwischen Energie und Impuls besteht der Zusammenhang $E^2 - p^2 \cdot c^2 = E_0^2$ bzw. $p^2 \cdot c^2 = E^2 - E_0^2$.

Anmerkung:
Die obige Beziehung lässt sich für den Sonderfall des Lichts (v = c) noch weiter vereinfachen. Beim Licht wird der Begriff Ruheenergie gegenstandslos; dann gilt
$E^2 - p^2 \cdot c^2 = 0$ bzw.
$E^2 = p^2 \cdot c^2$ oder
$E = p \cdot c$ bzw. $p = \frac{E}{c} = \frac{m \cdot c^2}{c} = m \cdot c.$