4.1.5 Zustandsgleichung des idealen Gases

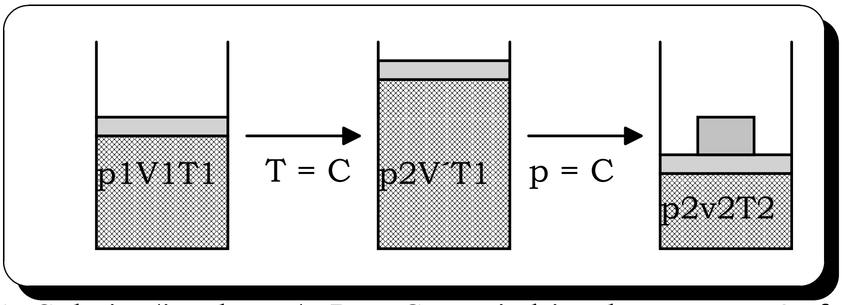
Im Physikunterricht der Mittelstufe werden folgende Gleichungen für ideale Gase experimentell ermittelt:

Gleichung	Bedingung	Name	Prozess
$p \cdot V = \text{const.}$	$T = \text{const.}$	Boyle-Mariotte	isotherm
$\frac{p}{T} = \text{const.}$	$V = \text{const.}$	Amontons	isochor
$\frac{V}{T} = \text{const.}$	$p = \text{const.}$	Gay-Lussac	isobar

Die beiden letzten Gesetze folgen aus den bekannten Zusammenhängen
$p = p_0 \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta\theta)$ bzw. $V = V_0 \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta\theta)$
mit $\gamma = \frac{1}{273}\text{K}^{-1}$, wenn man die absoluten Temperaturen einführt.

Bei den bisher behandelten Zustandsgleichungen wurde vorausgesetzt, dass jeweils eine Zustandsgröße konstant bleibt. Es lässt sich aber leicht eine Gleichung finden, die diese Einschränkung überflüssig macht.

In einem Gedankenversuch soll ein ideales Gas aus dem Anfangszustand $A(p_1, V_1, T_1)$ in den Endzustand $E(p_2, V_2, T_2)$ übergeführt werden. Unter der experimentell gesicherten Annahme, dass der Zustand eines Gases nicht von dem Weg abhängt, auf dem das Gas vom Anfangs- in den Endzustand gelangt, soll dieser Übergang in einem isothermen und einem isobaren Schritt erfolgen:



1. Schritt (isotherm): Das Gas wird isotherm vom Anfangsdruck p_1 in den Enddruck p_2 übergeführt. Für diesen Übergang gilt
$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V'$ bei $T = T_1 = \text{const.}$ bzw.
$V' = \frac{p_1 \cdot V_1}{p_2}$.
Das Gas hat jetzt bereits den Enddruck p_2, aber noch die Anfangstemperatur T_1 und das Zwischenvolumen V'.
2. Schritt (isobar): In einem isobaren Prozess ($p_2 = \text{const.}$) wird das Gas von T_1 auf T_2 erwärmt. Für das sich dann einstellende Endvolumen V_2 gilt
$\frac{V'}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$ bei $p = p_2 = \text{const.}$ bzw.
$V' = \frac{V_2 \cdot T_1}{T_2}$.
Die Elimination des Zwischenvolumens V' durch Gleichsetzen beider Terme liefert unmittelbar
$\frac{p_1 \cdot V_1}{p_2} = \frac{V_2 \cdot T_1}{p_2}$ bzw. $\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$.

Weitere Schreibweisen für diesen Zusammenhang sind
$\frac{p \cdot V}{T} = \text{const.}$ bzw. $p \cdot V = C \cdot T$.

Die obige allgemeine Gasgleichung gilt in dieser Form nur für ideale Gase. Viele reale Gase verhalten sich aber bei nicht zu hohem Druck und nicht zu niedriger Temperatur näherungsweise wie ideale Gase (vgl. Annahmen in der kinetischen Gastheorie). Unter den sog. Normalbedingungen versteht man eine Temperatur T_0 = 273 K und einen Druck p_0 = 760 Torr = 1013 mbar. Für die Konstante C in der allgemeinen Gasgleichung gilt dann auch
$C = \frac{p_0 \cdot V_0}{T_0}$,
d. h. die Konstante C ist bei Normalbedingungen proportional zum "Normalvolumen" V_0, dem Gasvolumen bei Normalbedingungen. Für das Normalvolumen idealer Gases gilt aber nach Avogadro ("Gleiche Volumina idealer Gase enthalten bei gleichen Bedingungen gleich viele Teilchen.") der Zusammenhang
$V_0 = n \cdot 22,4 \frac{l}{mol}$,
so dass die Konstante C so geschrieben werden kann:
$C = n \cdot \frac{1013 mbar \cdot 22,4 \frac{l}{mol}}{273 K} = n \cdot R$ mit
$R = \frac{101300 Pa \cdot 0,0224 \frac{m^3}{mol}}{273 K} = 8,314 \frac{J}{K \cdot mol}$.
Diese Konstante R heißt universelle Gaskonstante. Mit ihr nimmt die allgemeine Gasgleichung die Form
$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$
an. In dieser Form heißt die vorstehende Gleichung auch universelle Gasgleichung.

Schließlich kann die Gasgleichung auch unter Verwendung der Teilchenzahl N formuliert werden. Im Gas der Stoffmenge n gilt der Zusammenhang
$N = N_A \cdot n$ bzw. $n = \frac{N}{N_A}$.
Setzt man diese Beziehung in die Gasgleichung ein, erhält man
$p \cdot V = \frac{N}{N_A} \cdot R \cdot T = N \cdot k \cdot T$ mit
$k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$.
k heißt Boltzmannkonstante.

Zusammenfassung: Das Verhalten idealer Gase wird vollständig durch die sog. Gasgleichung beschrieben: $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ bzw. $p \cdot V = N \cdot k \cdot T$. Zwischen der universellen Gaskonstanten $R = 8,314\ JK^{-1}mol^{-1}$, der Boltzmann-Konstanten $k = 1,38 \cdot 10^{-23}\ JK^{-1}$ und der Avogadro-Konstanten $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}\ mol^{-1}$ besteht der Zusammenhang $R = k \cdot N_A$.