
5.1.7 Heisenbergsche Unschärferelation

Grundsätzliches zu Messvorgängen

Bei jedem Messvorgang findet eine Wechselwirkung zwischen Messobjekt und Messinstrument statt. Als Beispiel möge die Messung der Temperatur einer Flüssigkeitsmenge dienen: Die Temperatur des Messobjekts wird von der Temperatur des Thermometers mehr oder weniger stark beeinflusst. Wenn auch in einem solchen Beispiel der Einfluss des Messinstruments auf das Messobjekt vernachlässigt werden kann, so ist doch grundsätzlich mit jeder physikalischen Messung eine Rückwirkung des Messinstruments auf den untersuchten Gegenstand verbunden.

Im Bereich der Atome kann diese Wechselwirkung nicht mehr vernachlässigt werden, denn bei der Untersuchung einzelner atomarer Gebilde können die Messinstrumente, die ja auch aus Atomen bestehen, nicht mehr kleiner und feiner gemacht werden als die zu messenden Objekte. Genauso wenig kann die Beeinflussung des Gegenstandes durch das Messinstrument kontrolliert und durch entsprechende rechnerische Korrekturen ausgeglichen werden. Daher werden grundsätzlich alle Messungen im atomaren Bereich durch diese Wechselwirkungen gestört.

Die sich aus obigen Überlegungen ergebenden Schwierigkeiten bei Messvorgängen können durch ein von Werner Heisenberg (1901 - 1976, NP 1932) angegebenes Gedankenexperiment auch quantitativ gelöst werden.

Die Heisenbergsche Unschärferelation

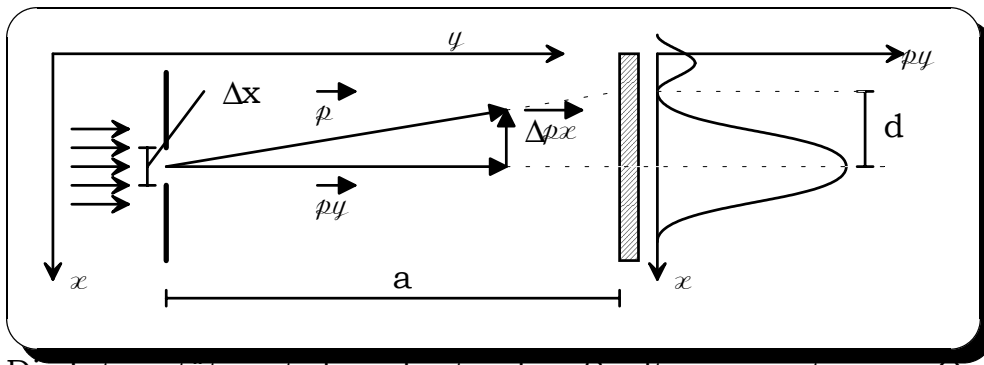
Im folgenden Gedankenexperiment soll überprüft werden, ob bei einem Teilchen gleichzeitig Ort und Impuls scharf bestimmt werden können:

Gedankenversuch: Ein Teilchenstrahl (Photonen, Elektronen o. ä.) einheitlichen Impulses p_y bewege sich auf einen Spalt der Breite Δx zu.

Ergebnis: Bei geeigneter Dimensionierung entsteht auf einem dahinter liegenden Schirm ein Beugungsbild, das zunächst qualitativ mit einer Wechselwirkung zwischen Teilchen und Spalt erklärt werden kann.

Skizze:

Heisenbergsche Unschärferelation



Die Intensitätsverteilung hinter dem Spalt muss mit einem Querimpuls Δp_x erklärt werden, den die Teilchen beim Durchgang durch den Spalt erfahren haben. Dieser Querimpuls kann wie folgt abgeschätzt werden:

Bei der Beugung am Einzelspalt gilt für die Lage des ersten Minimums

$$k \cdot \lambda = b \cdot \sin \alpha_1 \Rightarrow \lambda = \Delta x \cdot \sin \alpha_1$$

bzw. mit der Kleinwinkelnäherung

$$\alpha_1 \ll 1 \Rightarrow \sin \alpha_1 \approx \tan \alpha_1$$

$$\lambda = \Delta x \cdot \tan \alpha_1 = \Delta x \cdot \frac{d}{a} \text{ bzw. } \frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{d}{a} = \frac{\Delta p_x}{p_y} .$$

In erster Näherung wird bei der obigen Abschätzung der Querimpuls Δp_x aus der Richtungsänderung zum ersten Minimum bestimmt. Zwar liegen die meisten Lokalisationen im Bereich des Hauptmaximums, aber dafür gehören zu den weiter außen liegenden Maxima wesentlich größere Querimpulse, so dass die vorgenommene Annahme gerechtfertigt ist.

Für den Querimpuls Δp_x erhält man aus der letzten Gleichung

$$\Delta p_x = \frac{\lambda}{\Delta x} \cdot p_y .$$

Mit Hilfe der de-Broglie-Beziehung

$$p_y = \frac{h}{\lambda}$$

folgt schließlich

$$\Delta p_x = \frac{h}{\Delta x} .$$

Diese Gleichung erlaubt die Formulierung der sog. Heisenbergschen Unschärferelation in folgender Form:

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \approx h .$$

Anmerkungen:

1. Gegen diese Herleitung könnte man einwenden, dass der Auftreffort und damit der Querimpuls eines Teilchens, das den Spalt durchflogen hat, auf dem Registrierschirm genau bestimmt werden kann. Dies ist jedoch nur ein scheinbarer Widerspruch zur Unschärferelation; diese sagt nämlich nur aus, dass Ort und Impuls nicht gleichzeitig beliebig scharf bestimmt werden können. Für das Teilchen im eng begrenzten Spalt mit der Ortunsicherheit Δx kann eine exakte Impulsangabe nicht vorgenommen werden.
2. In der oben stehenden Ungleichung kommt es nicht auf den genauen Wert der rechten Seite an; wesentlich ist nur, dass das Produkt nicht Null werden kann und die Schranke sehr klein ist.

3. Die Heisenbergsche Unschärfe hat nichts mit einer Messungenauigkeit zu tun. Sie ist vielmehr bestimmt durch die unvermeidliche Störung des Messobjekts durch die Messanordnung!
4. Im Bereich der Mikrophysik ist der Bahnbegriff sinnlos, da er die gleichzeitige Messbarkeit von Ort und Impuls voraussetzt. Damit ist die Bestimmung des Anfangszustandes eines Systems unmöglich. Aussagen über den Fortgang eines Zustandes (Determinismus) sind damit ebenfalls unmöglich.
5. Das in der Unschärferelation auftretende Produkt $\Delta x \cdot \Delta p_x$ hat die Dimension einer Wirkung (Einheit: 1 Js). Ohne Beweis: Die Unschärferelation gilt auch für andere Größenpaare, deren Produkt die Dimension einer Wirkung hat. Derartige Größen heißen komplementär. Beispiele für komplementäre Größen sind zum Beispiel Ort und Impuls bzw. Energie und Zeit.
6. Bei makroskopischen Körpern spielt die Unschärferelation praktisch keine Rolle.

Zusammenfassung: Ort und Impuls von Quantenobjekten können nicht gleichzeitig scharf bestimmt werden. Für die Unschärfe gilt die Abschätzung $\Delta x \cdot \Delta p_x \approx h$.