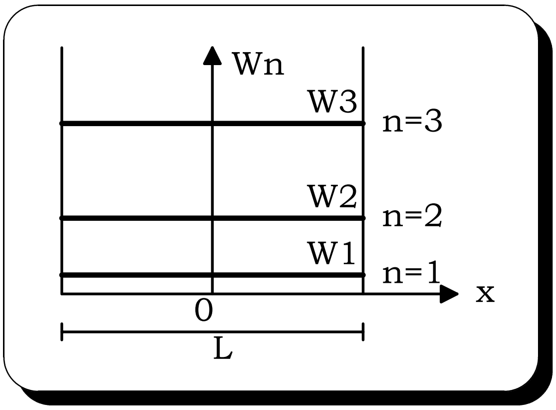
5.2.7 Energieniveaus für das Elektron im eindimensionalen Potentialtopf

Energiequantelung im linearen Potentialtopf

Nach den Überlegungen im letzten Kapitel hat die stehende Wahrscheinlichkeitswelle im linearen Potentialtopf der Länge L dieselbe Energie wie die Materiewelle des bewegten Elektrons, dem in einer Elektronenkanone die kinetische Energie
$W_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{p^2}{2 \cdot m}$
zugeführt wurde. Mit der de-Broglie-Beziehung
$\lambda = \frac{h}{p}$ bzw. $p = \frac{h}{\lambda}$
folgt unter Berücksichtigung der angenommenen Kräftefreiheit
$W_{ges} = W_{kin} + W_{pot} = W_{kin} + 0 = \frac{h^2}{2 \cdot m \cdot \lambda^2}$.
Diese Energie hat auch ein im Potentialtopf eingesperrtes Elektron, für das zusätzlich gilt:
$L = n \cdot \frac{\lambda}{2}$ bzw. $\lambda = \frac{2 \cdot L}{n}$.
Für die Energie des eingesperrten Elektrons findet man dann
$W = \frac{h^2}{8 \cdot m \cdot L^2} \cdot n^2, \ n \in \{1, 2, 3, ...\}$.
Das Elektron im linearen Potentialtopf nimmt also nicht beliebige, sondern nur diskrete Energiewerte an.

Graphische Veranschaulichung:



Zusammenfassung:
Ein in einem linearen Potentialtopf eingeschlossenes Teilchen der Masse m hat nur die diskreten, scharfen Energiewerte
$W_n = \frac{h^2 \cdot n^2}{8 \cdot m \cdot L^2}, \ n \in \{1, 2, 3, ...\}$.
Die Energie ist wegen der Randbedingungen an den beiden Enden ($|\Psi|^2 = 0$) gequantelt. Die natürlichen Zahlen n heißen Quantenzahlen.
Für n = 1 erhält man den tiefstmöglichen Energiezustand W_1. In diesem Zustand ist die Energie nicht Null, sondern hat den Wert
$W_1 = \frac{h^2}{8 \cdot m \cdot L^2}$.

Dreidimensionaler Potentialtopf und Folgerungen für den Atombau

Die für den linearen Potentialtopf gewonnenen Ergebnisse lassen sich erneut leicht auf drei Dimensionen erweitern.

Als gemeinsame Bedingung für alle möglichen stehenden Wellen ergab sich für den kubischen Topf mit den Kantenlängen
$L_x = L_y = L_z = L$.
die Randbedingung $|\Psi|^2 = 0$ an den Wänden. Dann gilt wiederum
$L_x = n_x \cdot \frac{\lambda_x}{2};\ L_y = n_y \cdot \frac{\lambda_y}{2};\ L_z = n_z \cdot \frac{\lambda_z}{2}$ bzw. $\frac{1}{\lambda_x} = \frac{n_x}{2 \cdot L}$ usw.
mit voneinander unabhängigen Quantenzahlen n_x, n_y und n_z.

Mit Hilfe der vorigen Überlegungen lassen sich Impuls und Energie dieser Wellen berechnen:
$p_x = \frac{h}{\lambda_x} = \frac{h \cdot n_x}{2 \cdot L};\ p_y = \frac{h}{\lambda_y} = \frac{h \cdot n_y}{2 \cdot L};\ p_z = \frac{h}{\lambda_z} = \frac{h \cdot n_z}{2 \cdot L}$.
Die einzelnen Impulse stehen paarweise aufeinander senkrecht; für den Gesamtimpuls p gilt dann nach den Gesetzen der Vektoraddition
$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = \frac{h^2}{4 \cdot L^2} \cdot \left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right)$.

Die Energie W lässt sich aus dem Impuls mit Hilfe der Beziehung
$W = \frac{p^2}{2 \cdot m}$
berechnen:
$W = \frac{h^2}{8 \cdot m \cdot L^2} \cdot \left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right)$.

Folgerungen für den Atombau

Ein in einem Potentialtopf eingeschlossenes Teilchen, das sich dort kräftefrei aufhält und die potentielle Energie Null hat, kann nicht die Gesamtenergie Null haben. Für die tiefstmögliche Energie folgt vielmehr
$W_{min} = \frac{3 \cdot h^2}{8 \cdot m \cdot L^2} \quad (n_x = n_y = n_z = 1)$.
Diese Energie heißt Lokalisations- oder Nullpunktsenergie.

Die Nullpunktsenergie hat nichts mit der Brownschen Bewegungsenergie zu tun, sondern besteht auch am absoluten Nullpunkt und ist eine nur quantenmechanisch verständliche Eigenschaft.

Wendet man die Kenntnisse über die Lokalisationsenergie auf das Wasserstoffatom mit einem Durchmesser von etwa $3 \cdot 10^{-10}$ m an, so folgt mit $m = m_e$ eine Nullpunktsenergie $W_1 \approx 12$ eV.

Atomkerne haben Durchmesser, die unter 10^{-14} m liegen Die Nukleonen in ihnen haben jeweils eine Masse von etwa $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg. Als nicht unterschreitbare Nullpunktsenergie eines in den Kern eingeschlossenen Nukleons folgt daraus etwa 6 MeV. Man versteht so, dass Teilchen, die aus dem Kern kommen, große Energiebeträge mit sich führen, während Energiebeträge bei Umlagerungen in der Atomhülle im Bereich weniger eV liegen.