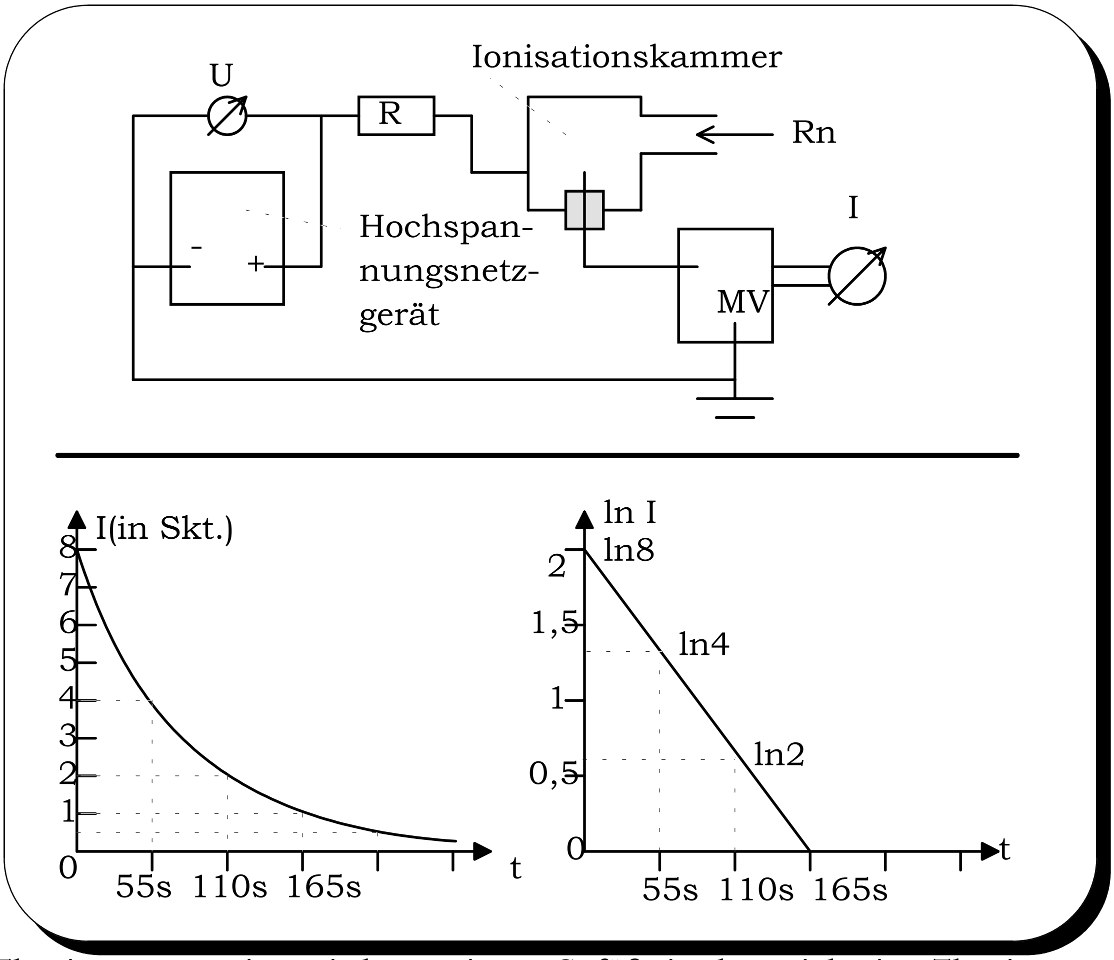
6.7 Zerfallsgesetz, Halbwertszeit, Aktivität; Gegenüberstellen von induktivem und deduktivem Vorgehen

Das Zerfallsgesetz

Im Allgemeinen ist es nicht möglich, den Zerfall eines Elements getrennt vom Zerfall der radioaktiven Folgeprodukte zu beobachten. Dies gelingt aber gut bei Verwendung des radioaktiven Gases Thoriumemanation ($^{220}_{86}Rn$), da dieses und sein Folgeprodukt ($^{216}_{84}Po$) sehr kurzlebig sind und praktisch unmittelbar aufeinander folgend zerfallen.

Versuch:



Thoriumemanation wird aus einem Gefäß, in dem sich eine Thoriumverbindung befindet, in eine Ionisationskammer gepumpt, deren Elektroden eine Spannung von ca. 1 kV gegeneinander haben. Ein Messverstärker in der Zuleitung zeigt den durch Ionisierung von Luftmolekülen hervorgerufenen Strom an.
Ergebnis: Nach jeweils ca. 55 s ist der Ionisationsstrom auf die Hälfte des 55 s vorher angezeigten Wertes abgesunken.

Auswertung: Der Verlauf der Kurve lässt eine Abnahme der Stromstärke nach einem Exponentialgesetz vermuten (vgl. die Überlegungen bei der Absorption von Beta-Strahlen!). Dies ist sicher der Fall, wenn
$\ln \frac{I(t)}{I_0} \sim t$
gilt. Man findet, wenn man $\ln \frac{I(t)}{I_0}$ über t aufträgt, tatsächlich eine Ursprungsgerade; dies ist eine Bestätigung des vermuteten Zusammenhangs.
Für die Abhängigkeit des Ionisationsstromes von der Zeit kann man also ansetzen:
$\ln \frac{I(t)}{I_0} = -\lambda \cdot t.$
Daraus folgt unmittelbar durch Integration
$I(t) = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}.$

Deutung: Unter der zur Zeit t herrschenden Stromstärke I(t) versteht man den Grenzwert
$I(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}$.
Die Zahl der während dt erzeugten und zum Strom beitragenden Ladungen ist im Sättigungsbereich der Ionisationskammer direkt proportional zur Zahl dN der während dt zerfallenden Atome:
$I(t) \sim \dot{N}(t)$ bzw. $I(t) = c \cdot \dot{N}(t)$.
Mit den Bezeichnungen
$I(t=0) = I_0 = c \cdot \dot{N}(t=0) = c \cdot \dot{N}_0$
folgt durch einsetzen in obige Gleichung
$\dot{N}(t) = \dot{N}_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$.
Diese Differentialgleichung wird gelöst mit dem Ansatz
$N(t) = C_1 + C_2 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$,
wobei sich die Konstanten C_1 und C_2 aus den sog. Nebenbedingungen ergeben, dass zur Zeit t = 0 N_0 Atome und zur Zeit $t \to \infty$ 0 unzerfallene Atome vorhanden sind. Dies lässt sich so ausdrücken:
$N(0) = N_0$ und $N(\infty) = 0$.
Setzt man diese Gleichungen in den Lösungsansatz ein, so folgt
$N(\infty) = 0 = C_1 + C_2 \cdot e^{-\lambda \cdot \infty} = C_1 + 0 \Rightarrow C_1 = 0$
sowie
$N(0) = N_0 = C_1 + C_2 \cdot e^{-\lambda \cdot 0} = 0 + C_2 \cdot 1 \Rightarrow C_2 = N_0.$
Damit lautet das radioaktive Zerfallsgesetz:
$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}.$
Die Konstante λ heißt Zerfallskonstante; sie wird in s^{-1} angegeben.

Anmerkungen:

1. Die oben angegebene Funktion für den zeitlichen Verlauf des radioaktiven Zerfalls ist eine stetige, beliebig oft differenzierbare Funktion. In Wirklichkeit zerfällt aber stets ein ganzer Kern, so dass die exakte Zerfallsfunktion ein Treppenfunktion mit Treppenhöhe 1 sein müsste. Da aber in sehr kurzer Zeit sehr viele Kerne zerfallen, ist auf den Zerfallsvorgang die Statistik anzuwenden. Die Zerfallsgleichung beschreibt also den zeitlichen Verlauf des Zerfalls sehr vieler Teilchen, ohne auf den Einzelprozess einzugehen.

2. Die Zerfallswahrscheinlichkeit für einen bestimmten Kern im nächsten Augenblick ist stets genau so groß wie für alle übrigen Kerne. Man kann dies so ausdrücken: "Atome altern nicht."

Theoretische Ableitung des Zerfallsgesetzes

Das radioaktive Zerfallsgesetz lässt sich außer durch Auswertung der experimentellen Ergebnisse (induktive Methode) auch aus zwei einfachen und nahe liegenden Annahmen herleiten, die bereits Rutherford gemacht hat (deduktive Methode):
"Die Zahl der während eines kleinen Zeitintervalls Δt zerfallenden Atome $\Delta N(t)$ ist direkt proportional zu Δt und direkt proportional zur Zahl $N(t)$ der zur Zeit t noch unzerfallenen Atome."

Daraus folgt:
$\Delta N(t) \sim \Delta t$ und $\Delta N \sim N(t)$ bzw. $\Delta N(t) = -\lambda \cdot N(t) \cdot \Delta t$.
Das Minuszeichen drückt dabei die Abnahme der Zahl der unzerfallenen Atome aus. Durch Grenzwertbildung erhält man daraus die Differentialgleichung
$dN(t) = -\lambda \cdot N(t) \cdot dt$,
die mit der Methode der Trennung der Variablen gelöst werden kann:
$\frac{dN(t)}{N(t)} = -\lambda \cdot dt$.
Daraus folgt durch beidseitige unbestimmte Integration
$\int \frac{dN}{N} = -\int \lambda \cdot dt$ bzw.
$\ln N(t) = -\lambda \cdot t + c$.

Durch Anwenden der Exponentialfunktion zur Basis e wird auf der linken Seite der Gleichung der natürliche Logarithmus eliminiert:
$e^{\ln N(t)} = N(t) = e^{-\lambda \cdot t + c} = e^c \cdot e^{-\lambda \cdot t}$.
Die Konstante $C = e^c$ kann sofort berechnet werden, wenn man überlegt, dass
$N(t=0) = N_0$
gilt. Setzt man dies in obige Gleichung ein, so folgt unmittelbar
$N(t=0) = N_0 = C \cdot e^{-\lambda \cdot 0} = C \cdot 1$, also $C = N_0$.
Damit nimmt das Zerfallsgesetz auch mit diesem Ansatz die Form
$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$
an und bestätigt die Richtigkeit der Rutherfordschen Hypothese.

Anmerkungen:
1. Die typische Zerfallskurve erhält man auch ohne Kenntnis des analytischen Zusammenhangs zwischen t und N, wenn man die Annahme von Rutherford etwas umschreibt:
   $\Delta N(t) = -\lambda \cdot N(t) \cdot \Delta t \Rightarrow \frac{\Delta N}{N} = -\lambda \cdot t$ bzw. $\frac{\Delta N}{N} \sim \Delta t$.
   Dies bedeutet, dass in einem kleinen Zeitintervall ($\Delta t \ll T$, vgl. unten) ein konstanter Bruchteil der zu Beginn dieses Intervalls vorhandenen Atome zerfällt. Am Ende des Intervalls gilt dann für die Zahl der noch

unzerfallenen Atome
$N(t + \Delta t) = N(t) + \Delta N = N(t) - N(t) \cdot \lambda \cdot \Delta t = N(t) \cdot (1 - \lambda \cdot \Delta t)$.
Dieser Wert liefert dann das "neue" N(t), woraus mit Anwendung derselben Gleichung $N(t + 2 \cdot \Delta t)$ approximiert werden kann usw. Ein derartiger Zusammenhang kann in einem geeigneten Computerprogramm zur sukzessiven Berechnung von N verwendet werden.

2. Der Zusammenhang
$\frac{\Delta N}{N} \sim \Delta t$
für kleine Δt erlaubt eine weitere Interpretation des Satzes "Atome altern nicht.": Die Zerfallswahrscheinlichkeit ist für einen Kern in jedem Zeitintervall konstant! Bei Lebewesen ist dies bekanntlich nicht der Fall; die Wahrscheinlichkeit, etwa im nächsten Jahr zu sterben, steigt mit zunehmendem Alter.

Zusammenfassung: Beim radioaktiven Zerfall sind von der ursprünglich vorhandenen Zahl N_0 von Kernen nach der Zeit t etwa $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ Kerne nicht zerfallen.

Kennzeichnende Größen beim radioaktiven Zerfall

Solange die Statistik auf den radioaktiven Zerfall anwendbar ist, kann ein Ende des Zerfalls nicht angegeben werden. Es ist aber möglich und üblich, als Maß für die Zerfallsgeschwindigkeit eines Elements die sog. Halbwertszeit T, also die Zeit, während der die Hälfte der anfangs vorhandenen Substanz zerfällt, anzugeben.

Zwischen der Zerfallskonstanten λ und der Halbwertszeit T besteht ein einfacher Zusammenhang:
$N(T) = \frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot T} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda \cdot T}$.
Beiderseitiges Logarithmieren liefert
$\ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2 = -\lambda \cdot T$ bzw. $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ bzw. $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Unter der Aktivität A eines Präparats versteht man die zeitliche Änderung der Zahl der unzerfallenen Kerne, die Zerfallsgeschwindigkeit. Für sie gilt:
$A = \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta N}{\Delta t} \right| = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = \lambda \cdot N(t)$.
Die Einheit der Aktivität ist $1\ s^{-1} = 1$ Bq (Becquerel).

Eine weitere für den radioaktiven Zerfall kennzeichnende Größe ist die sog. mittlere Lebensdauer T_m. Zur Berechnung von T_m geht man etwa so vor wie bei der Bildung einer Durchschnittsnote: Man multipliziert jede mögliche Note mit der Zahl der Schüler, die diese Note erhalten, summiert und dividiert den Summenwert durch die Gesamtzahl der Schüler. Analog multipliziert man beim radioaktiven Zerfall die im Zeitintervall Δt zwischen t und $t + \Delta t$ noch unzerfallenen Atome, summiert auf und teilt durch die Gesamtzahl der anfangs vorhandenen Teilchen. Berücksichtigt man, dass die den

Noten entsprechenden Zeitintervalle Δt unendlich klein werden können, wird aus der Summe ein Integral, und man erhält die mittlere Lebensdauer T_m so:

$$T_m = \frac{1}{N_0} \cdot \int_0^\infty N(t)dt = \frac{1}{N_0} \cdot \int_0^\infty N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot dt = \frac{N_0}{N_0} \cdot \frac{1}{-\lambda} \cdot [e^{-\lambda \cdot t}]_0^\infty = \frac{1}{-\lambda} \cdot (0-1) = \frac{1}{\lambda} \quad .$$

Die mittlere Lebensdauer T_m ist also gleich dem Kehrwert der Zerfallskonstanten λ.

Zur Veranschaulichung der mittleren Lebensdauer T_m mag folgende Überlegung dienen: Würde ein radioaktives Präparat mit der Anfangszerfallsgeschwindigkeit

$$\dot{N}_0 = N_0 \cdot (-\lambda) \cdot e^{-\lambda \cdot 0} = -\lambda \cdot N_0$$

weiter zerfallen, so würde sich als Graph im t-N-Diagramm eine fallende Gerade mit der Gleichung

$$N(t) = -\lambda \cdot N_0 \cdot t - N_0$$

ergeben. Alle Teilchen wären zerfallen, wenn gilt:

$$N(t*) = 0 = -\lambda \cdot N_0 \cdot t * + N_0 \Rightarrow \lambda \cdot N_0 \cdot t * = N_0 \text{ bzw. } t * = \frac{1}{\lambda} = T_m.$$

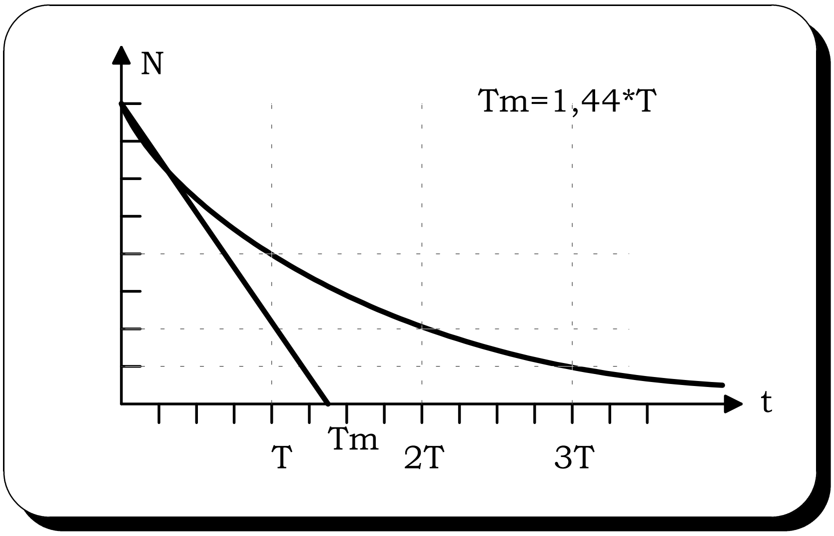
Wegen

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

gilt

$$T_m = \frac{1}{\lambda} = \frac{T}{\ln 2} \approx 1,44 \cdot T.$$

Skizze:



Die mittlere Lebensdauer T_m ist also diejenige Zeit, während der ein Präparat vollständig zerfallen würde, das mit konstanter Anfangszerfallsgeschwindigkeit $\dot{N}$ weiter zerfiele.

Zusammenfassung: Die Halbwertszeit T gibt die Zeitspanne an, nach der etwa die Hälfte der Kerne zerfallen ist. Es ist $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$. Das Zerfallsgesetz gilt für alle radioaktiven Substanzen. Jedes radioaktive Nuklid hat eine charakteristische Halbwertszeit. Die Aktivität A einer radioaktiven Substanz ist der Quotient aus der Anzahl der in einer kleinen Zeitspanne $\Delta t \ll T$ stattfindenden Zerfälle und dieser Zeitspanne Δt. Die Aktivität A ist proportional der noch nicht zerfallenen Anzahl von Atomen und nimmt wie diese exponentiell ab: $A(t) = \lambda \cdot N(t)$. Die Einheit der Aktivität ist 1 Bq = 1 s^{-1}.

Anwendungen in Medizin und Technik

Radioisotope in der Diagnostik: Die Tracer-Technik

Um die Funktion z. B. der Schilddrüse zu überprüfen, injiziert man eine sehr kleine, kaum schädliche Menge eines kurzlebigen radioaktiven Isotops (z. B. Jod) in das Blut. Aus der Absorptionskinetik und der räumlichen Verteilung des Isotops lassen sich Rückschlüsse über die Funktionsfähigkeit des Organs ziehen.

Radioisotope in der Therapie

Krebszellen sind strahlenempfindlicher als die Zellen von gesundem Gewebe. Zur Geschwulstbehandlung wird daher häufig mit γ-Strahlung (z. B. aus Co-60-Quellen) oder Teilchenstrahlen aus Beschleunigern bestrahlt, um die kranken Zellen abzutöten.

Radioisotope in der Technik

Eine berührungslose Dickenmessung z. B. von Walzblechen wird möglich, wenn man das Blech mit β-Teilchen eines geeigneten Präparats bestrahlt. Aus Absorptionsmessungen lassen sich Rückschlüsse auf die Materialdicke ziehen.

Altersbestimmung mit der C-14-Methode

Zur Bestimmung des Alters organischer (kohlenstoffhaltiger) Substanzen eignet sich die sog. C-14-Methode:

In der Atmosphäre wird unter dem Einfluss der konstanten kosmischen Strahlung laufend das radioaktive Kohlenstoffisotop C-14 (T = 5730 a) gebildet, das sich mit dem Luftsauerstoff zu radioaktivem Kohlendioxid verbindet. In der Luft hat sich längst ein konstantes Häufigkeitsverhältnis zwischen C-14 und C-12 (ca. $1{,}5 \cdot 10^{-12}$) eingestellt. Durch die Assimilation wird C-14 von den Pflanzen bzw. durch pflanzliche Nahrung von den Tieren aufgenommen. Solange ein Tier oder eine Pflanze lebt, steht deren Kohlenstoffgehalt dauernd in Kontakt mit dem Kohlenstoff der Atmosphäre und hat somit die gleiche C-14-Konzentration wie dieser. Stirbt der Organismus ab, so sinkt der C-14-Gehalt nach dem Zerfallsgesetz.

Die C-14-Atome stammen sicher nicht aus einem Reservoir, das zu Beginn der Erdgeschichte vorhanden war. Wegen der "kurzen" Halbwertszeit wären innerhalb der Jahrmillionen auch bei noch so großer Anfangszahl kaum

mehr solche Atome vorhanden. Es müssen also ständig neue C-14-Atome gebildet werden.
Dies geschieht in der oberen Atmosphäre. Dort wird C-14 nach der Reaktionsgleichung
$$^{1}_{0}n + ^{14}_{7}N \rightarrow ^{1}_{1}H + ^{14}_{6}C$$
gebildet.

Die beiden konkurrierenden Vorgänge der Neubildung und des Zerfalls laufen nach folgenden Gesetzmäßigkeiten ab: Während des Zeitintervalls Δt wird eine zeitproportionale Anzahl von C-14-Atomen gebildet, im gleichen Zeitraum zerfällt ein Teil wieder, so dass sich für die Teilchenzahl zur Zeit $t + \Delta t$ die Gleichung
$$N(t + \Delta t) = N(t) + k \cdot \Delta t - \lambda \cdot N(t) \cdot \Delta t.$$
Mit $k = 1{,}02 \cdot 10^{19}\ s^{-1}$ (Bildungsrate) und $T = 5730$ a (Halbwertszeit) ergibt sich folgendes Diagramm für die Teilchenzahl innerhalb von 50000 Jahren: