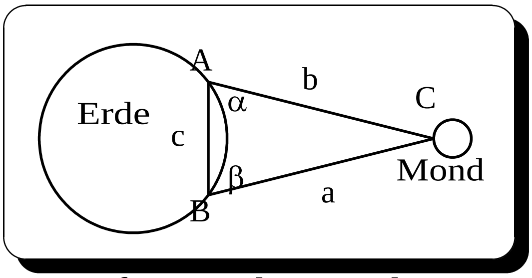
1.2 Problematik der Längenmessung

Direkte Längenmessung

Messen bedeutet vergleichen mit einer Einheit. Die gebräuchliche Längenmessung geschieht daher durch Vergleich mit einem Längenmaßstab, etwa einem Meterstab, oder durch Beobachtung von Lichtwelleninterferenzen (direkte Methode).

Indirekte Längenmessung

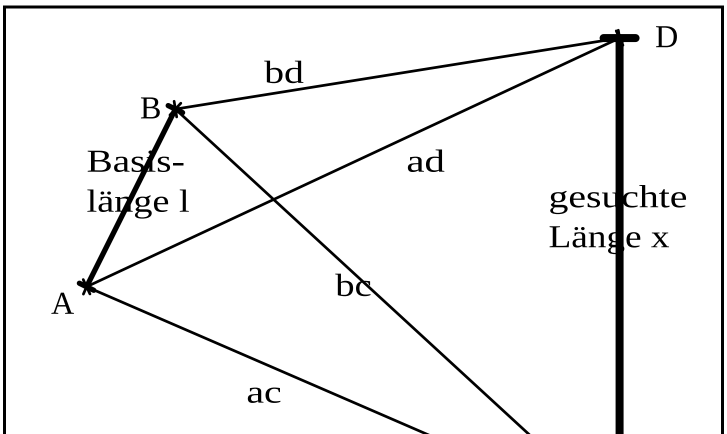
Bei der Messung großer Längen versagen die direkten Methoden. Eine Methode der indirekten Messung z. B. zur Bestimmung der Entfernung Erde - Mond ist die Triangulierung:



Die Entfernung des Mondes z. B. vom Punkt A erhält man bei bekannter Entfernung c zwischen A und B mit dem Sinussatz durch Messung der Winkel α und β:

$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin(180^0-\alpha-\beta)} \Rightarrow b = \sin\beta \cdot \frac{c}{\sin(180^0-\alpha-\beta)}$.

Ein Beispiel für die indirekte Längenmessung ist die Vermessung der Laufbahn unserer Schule mit Erstellung eines Messprotokolls:



Durchführung:

Messgrößen sind die Basislänge l (direkte Messung) sowie die von den Endpunkten der Basis aus gemessenen Winkel zwischen Basis und Streckenendpunkten $\alpha_C, \beta_C, \alpha_D, \beta_D$.

Berechnung:

siehe Beiblatt!

Messprotokoll

Hauptziel ist zu verstehen, wieso man Messprotokolle schreiben sollte. Was im Messprotokoll enthalten sein soll, ergibt sich aus dem Grund der Messung.

Wieso ein Messprotokoll?

- Ein Messprotokoll soll festhalten, wieso was und wie gemessen wurde.

- Angenommen, man probiert ein Bauteil aus um herauszufinden, was es kann. Wenn sich jemand später dafür interessiert, welches Ergebnis der Versuch geliefert hat, hilft das Messprotokoll ungemein beim Nachvollziehen.

- Jemend baut eine Schaltung auf und kommt zu einem interessanten Resultat und nun möchte ein Kollege die Schaltung nachbauen.
- Messprotokolle werden häufig auch erstellt, um beweisen zu können, dass eine Schaltung funktioniert oder um für eine spätere Fehlersuche Vergleichswerte zu haben.

Was soll drauf?

- Sinn der Messung, kurze Erklärung

- Messobjekt
  falls vorhanden: Inventarnummer

- Messschaltung/Schema

- Messmittel
  falls vorhanden: Inventarnummer
  evt. Datum der letzten Kalibration

- Berechnungen
  (wenn nötig) auf Normwerte runden

Leistung nicht vergessen

- Messresultat
  Zahlen, Grafiken, Tabellen

- Zum Messresulat gehört nicht nur der Wert, sondern auch ein Kommentar wie "Transistor in Sättigung", "" etc. wobei erkannbar bleiben soll was Messung und was Interpretation ist.
  Bei Diagrammen Achsenbeschriftung nicht vergessen.
  Fotos halten nicht nur bei komplexen Aufbauten wertvolle Details fest.
  Einstellungen bei Messmitteln

- Hinweise
  spezielle Einstellungen an Messmitteln
  besondere Kabel (Durchmesser, Länge)

- Diverses
  Name, Datum, Unterschrift

Weitere Überlegungen:

- Je nach Ziel der Messungen sind Abwandlungen möglich.

- Die Reihenfolge ist von den konkreten Messungen abhängig.

- Grundziel ist die Nachvollziehbarkeit der Messung.

- Die äußere Form ist zu beachten. Die Schrift und das Blatt sollten sauber sein (keine Kaffeeflecken o. ä.).

Bestimmung des Erdumfangs nach Eratosthenes

Einen anderen Weg ging Eratosthenes bei der Bestimmung des Erdumfangs.

Eratosthenes aus Kyrene war griechischer Gelehrter und Philosoph. Er lebte von 275-194 v. Chr. und war seit 236 Bibliothekar in Alexandria. Neben der Messung des Erdumfangs sind uns heute seine Methode zum Auffinden von Primzahlen (Sieb des Eratosthenes), Dichtungen und grammatische Arbeiten zur griechischen Sprache überliefert. Außerdem entwarf er eine Gradnetzkarte für die ihm damals bekannte Welt.

Wie groß ist die Erde?

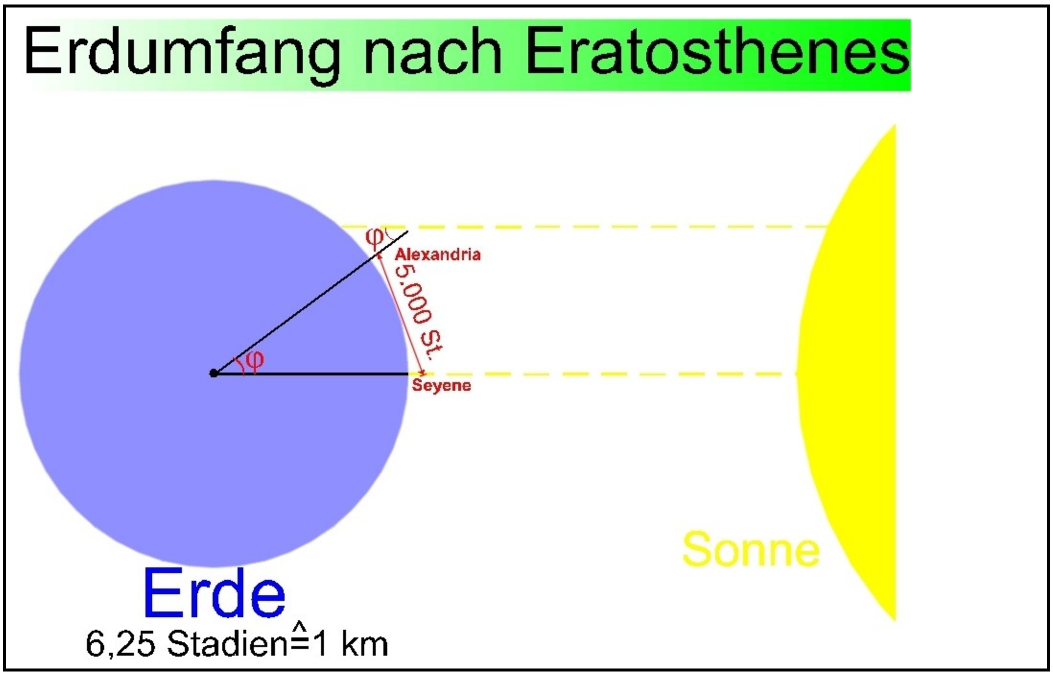
Den alten Griechen war die Erde noch nicht in unserem heutigen Umfang bekannt, jedoch kannten sie schon große Teile Europas, sowie Teile Asiens und Afrikas. Eratosthenes interessierte es, wie groß die Erde denn sei. Ihm war Folgendes bewusst:

- In Alexandria und Seyene (heute Assuan) geht die Sonne zeitgleich auf, sie liegen also auf dem gleichen Längengrad
- Zur Sommersonnenwende fällt die Sonne genau senkrecht in den Brunnen von Seyene
- Der Obelisk in Alexandria wirft immer einen Schatten
- Eine Kamelkarawane legt 100 Stadien am Tag zurück und braucht für die Strecken Alexandria - Seyene 50 Tage, die Distanz ist also 5000 Stadien
- Die Sonnenstrahlen kommen parallel auf die Erde (davon gingen damals jedenfalls alle Mathematiker aus)

Die Bestimmung des Umfangs

Am 21. Juni, dem Tag der Sommersonnenwende, maß Eratosthenes den Winkel, den die Sonne am Obelisken von Alexandria warf. Er maß 7°12'.

Nach dem Scheitel- und Stufenwinkelsatz war dieser Winkel der Winkel im Erdmittelpunkt zwischen Alexandria und Seyene. Da ein Vollkreis 360° hat, ist dieser Winkel 1/50 des Vollkreises und die Strecke Alexandria und Seyene 1/50 des Erdumfangs. Er errechnete:



$\frac{7{,}2^0}{360^o} = \frac{50000 \text{ Stadien}}{x} \Rightarrow x = \frac{360^o \cdot 50000 \text{ Stadien}}{7{,}2^0} = 250000 \text{ Stadien}$

Ist diese Berechnung genau?

Eratosthenes ging offensichtlich von einigen falschen Voraussetzungen aus:

- Seyene liegt 3° neben dem Längenkreis, der durch Alexandria geht.
- Die Sonne scheint nicht genau in den Brunnen, da Seyene 50 km nördlich des nördl. Wendekreises liegt, also die Sonne nicht im Zenit steht.
- Die Distanz Alexandria - Seyene beträgt nicht 800 km sondern 729 km.
- Der Winkel ist nicht 7°12' sondern 7°5'.

Die Frage nach der Genauigkeit konnte lange nicht festgestellt werden, da die Länge eines Stadions nicht bekannt war (das von Eratosthenes verwendete Stadion ist nicht das von Athen, Alexandria oder Rom). Durch Forschungen erhielt man jedoch den ungefähren Wert:

6,25 Stadien=1 km

Man rechne um und erhält:

250.000 Stadien = 40.000 km

Dieser Wert stimmt ziemlich exakt mit dem heute bekannten Erdumfang überein.

Welche Bedeutung hat die damalige Entdeckung?

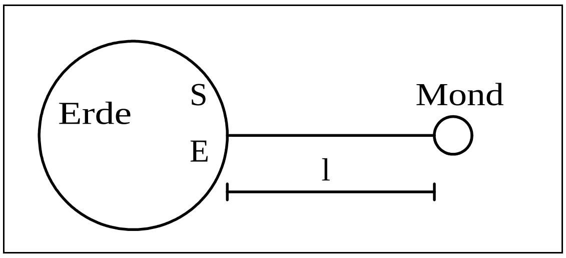
Das Verfahren war lange Zeit das einzig bekannte, bis Picard 1671 ein besseres Verfahren fand. Dennoch konnte der genaue Umfang erst mit den ersten Satelliten bestimmt werden. Aufgrund des Erdumfanges wurde in Paris erstmals das Meter definiert als 1/40.000.000 des Erdumfangs. Da dieses Maß nicht genau genug bestimmt werden kann und nicht auf alle Zeit unveränderlich ist, da die Erde keine genaue Kugelform ist, ist das Meter heute über die Lichtgeschwindigkeit definiert.

Obwohl also für die Physiker heutzutage weniger bedeutsam, so ist diese Entdeckung historisch gesehen revolutionär: 250 Jahre vor Christus hatte die Erde bereits eine festgestellte Größe!

Es erstaunt daher umso mehr, dass die Erde trotzdem noch lange Zeit als Scheibe gelten sollte.

Die Laufzeitmessung von Signalen

Ein Signal wird vom Ausgangspunkt zum Ziel geschickt und dort reflektiert. Aus der Laufzeit lässt sich die Entfernung leicht bestimmen (vgl. Skizze):



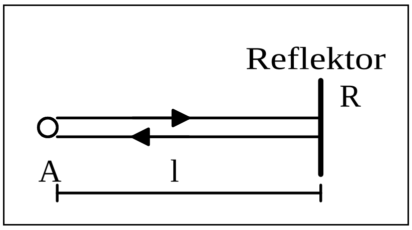
Unter den Annahmen geradlinigen Signalausbreitung und konstanter Signalgeschwindigkeit c folgt
$c = \frac{2 \cdot l}{T} \Rightarrow l = \frac{c \cdot T}{2}$.

Anmerkungen:

1. Die Laufzeitmethode wird beim Echolotverfahren zur Bestimmung von Meerestiefen, zum Aufspüren von Fischschwärmen u. ä. verwendet.
2. Die Radarmessung (meist mit cm-Wellen) ist die wichtigste und genaueste Methode zur Navigation. Elektromagnetische Wellen benötigen zudem kein körperliches Ausbreitungsmedium.

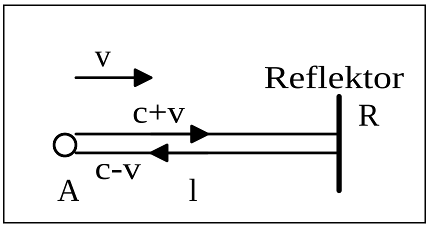
Das Schallradar ist allerdings anfänglich gegenüber Luftbewegungen (Wind). Es sind hierbei 3 Fälle bei der Reflexion an einem Reflektor zu unterscheiden:

a) Windstille (v = 0):



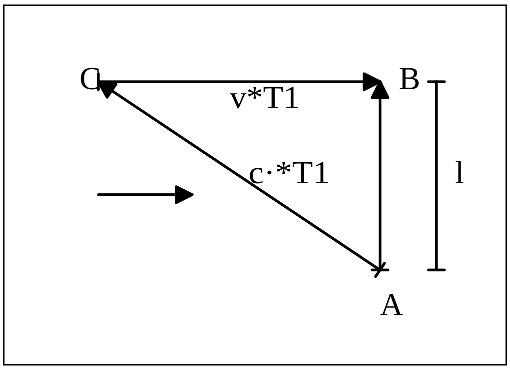
$c = \frac{2 \cdot l}{T} \Rightarrow T = \frac{2 \cdot l}{c}$.

b) Wind weht in bzw. gegen die Messrichtung (v < c):



Auf dem Hinweg gilt
$v_{ges} = c + v = \frac{l}{T_1} \Rightarrow T_1 = \frac{l}{c+v}$.
Für den Rückweg gilt analog
$v_{ges} = c - v = \frac{l}{T_2} \Rightarrow T_2 = \frac{l}{c-v}$.
Für die Gesamtlaufzeit folgt daraus
$T_{ges} = T_1 + T_2 = \frac{l}{c+v} + \frac{l}{c-v} = \frac{l \cdot (c-v) + l \cdot (c+v)}{(c+v) \cdot (c-v)} = \frac{l \cdot c - l \cdot v + l \cdot c - l \cdot v}{c^2 - v^2}$
bzw.
$T_{ges} = \frac{2 \cdot l \cdot c}{c^2 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{2 \cdot l}{c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

c) Seitenwind ($\vec{v} \perp \vec{c}$):



Damit das bei ausgesandte Signal bei B ankommt, muss es wegen der Abdrift in Richtung auf C losgesandt werden bzw. bei Windstille würde es bei C ankommen.
Für die Laufzeit T_1 gilt:
$(c \cdot T_1)^2 - (v \cdot T_1)^2 = l^2$ bzw.
$T_1^2 = \frac{l^2}{c^2 - v^2} \Rightarrow T_1 = \frac{l}{\sqrt{c^2 - v^2}}$.
Aus Symmetriegründen ist die Laufzeit für den Rückweg genau so lang:
$T_{ges} = \frac{2 \cdot l}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2 \cdot l}{\sqrt{c^2 \cdot (1 - \frac{v^2}{c^2})}} = \frac{2 \cdot l}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

Anmerkung:
Ohne Beweis: Das Schallsignal braucht bei jeder beliebigen Windrichtung länger als bei Windstille, d. h. bei Wind erscheinen alle mit Schallradar gemessen Entfernungen vergrößert.

This document was created with Win2PDF available at http://www.win2pdf.com.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.
This page will not be added after purchasing Win2PDF.